

REPUBLIQUE TUNISIENNE

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

DIRECTION GENERALE
DE LA RENOVATION UNIVERSITAIRE



LMD

Commission Nationale Sectorielle de Mathématiques

Master de Recherche en Sciences et Technologies

Mention: Mathématiques

Juillet 2017

Parcours:
Mathématiques fondamentales
(MF)

Parcours : Mathématiques Fondamentales (S7)

N°	Unité d'enseignement	Nature et code de l'UE	Elément constitutif (ECUE) de l'UE	Volume horaire / semaine			Crédits		Coefficients		Régime d'examen	
				Cours	TD	TP	ECUE	UE	ECUE	UE	Contrôle continu	Régime mixte / Durée Examen
1	UE-1	Algèbre		6h CI*				7		5		X Exam 3h
2	UE-2	Topologie et Analyse fonctionnelle		6h CI*				7		5		X Exam 3h
3	UE-3	Analyse de Fourier et distributions		6h CI*				7		5		X Exam 3h
4	UE Optionnelle	Optionnelle (fixée par la commission de Master)		2h				5		3		X Exam 1h 30
5	UE Transversale	Introduction à Python		2h CI				4		2	X	
Total				Total / semaine 22 h.				30		20	X	
				Total / semestre 308 h.								

(*) ou 3h cours et 3h TD

Parcours : Mathématiques Fondamentales (S8)

N°	Unité d'enseignement	Nature et code de l'UE	Elément constitutif (ECUE) de l'UE	Volume horaire / semaine			Crédits		Coefficients		Régime d'examen	
				Cours	TD	TP	ECUE	UE	ECUE	UE	Contrôle continu	Régime mixte / Durée Examen
1	UE-4	Géométrie différentielle		6h CI*				7		5		X Exam 3h
2	UE-5	Unité à fixer de la liste ci-jointe		6h CI*				7		5		X Exam 3h
3	EU-6	Unité à fixer de la liste ci-jointe		6h CI*				7		5		X Exam 3h
4	UE Optionnelle	Optionnelle (fixée par la commission de Master)		2h				5		3		X Exam 1h 30
5	UE Transversale	Projet			2h			4		2	X	
Total				Total / semaine 22 h.				30		20	X	
				Total / semestre 308 h.								

(*) ou 3h cours et 3h TD

Parcours : Mathématiques Fondamentales (S9)

N°	Unité d'enseignement	Nature et code de l'UE	Élément constitutif (ECUE) de l'UE	Volume horaire / semaine			Crédits		Coefficients		Régime d'examen	
				Cours	TD	T P	ECUE	UE	ECUE	UE	Contrôle continu	Régime mixte / Durée Examen
1	UE-1	Unité spécifique 1		4 h cours				7		5		X Exam 3h
2	UE-2	Unité spécifique 2		4 h cours				7		5		X Exam 3h
3	UE-3	Unité spécifique 3		4 h cours				7		5		X Exam 3h
4	UE Optionnelle	Optionnelle (fixée par la commission de Master)		2h				5		3		X Exam 1h 30
5	UE Transversale	Projet			2h			4		2	X	
Total				Total / semaine 16 h.				30		20	X	
				Total / semestre 224 h.								

Contenu des programmes des unités obligatoires en M1

Parcours : Mathématiques fondamentales

Algèbre (Unité obligatoire)
(6h CI) ou (3h cours et 3h TD)

- Divisibilité dans un anneau commutatif et unitaire : élément premier et élément irréductible, notion de ppcm et pgcd, exemples des anneaux quadratiques $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.
- Anneaux factoriels : exemples des anneaux euclidiens et principaux, factorialité de l'anneau des polynômes. critères d'irréductibilité dans l'anneau des polynômes.
- Anneaux noethériens : définitions et caractérisations, radical d'un idéal, idéal primaire, idéal irréductible, décomposition d'un idéal en idéaux primaires.
- Modules sur un anneau : module quotient, module des homomorphismes, suites exactes de modules, modules de type fini, modules libres, modules de torsion.
- Modules sur un anneau principal : théorème de la base adaptée et facteurs invariants, applications (groupes abéliens de type fini, invariants de similitude d'un endomorphisme).
- Produit tensoriel de modules.

Analyse de Fourier et distributions (Unité obligatoire)

(6h CI) ou (3h cours et 3h TD)

- Convolution sur \mathbb{R}^n : approximations de l'unité, régularisation ; densité des fonctions C^∞ à support compact, espace \mathcal{S} de Schwartz.
- Transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur \mathbb{R}^n et ses propriétés. Transformation de Fourier dans \mathcal{S} et dans L^2 . Théorème d'inversion et Formule de Plancherel.
- Distributions, exemples, dérivée, support, convolution.
- Distributions tempérées, transformée de Fourier d'une distribution tempérée.
- Application de l'analyse de Fourier aux équations aux dérivées partielles.

Topologie et Analyse fonctionnelle (Unité obligatoire)

(6h CI) ou (3h cours et 3h TD)

- Introduction aux espaces topologiques (topologie produit, topologie quotient,...).
- Compacité et connexité dans les espaces topologiques. Théorème d'Ascoli, théorème de Stone-Weierstrass.
- Rappels sur les Espaces vectoriels normés. Espaces de Banach, étude des espaces l^p et L^p , dualité, convergence faible.

- Théorème de Baire, Théorème de Banach-Steinhaus, Théorème de l'application ouverte, Théorème du graphe fermé.
- Formes linéaires continues sur les espaces vectoriels normés, Théorème de Hahn-Banach.

Géométrie différentielle (Unité obligatoire)

(6h CI) ou (3h cours et 3h TD)

- Rappels : Théorème du rang constant pour une fonction de classe C^∞ définie sur un ouvert de \mathbf{R}^n .
 - Rappels sur les sous-variétés de \mathbf{R}^n , différentes caractérisations locales. Exemples.
- Paramétrisation, changement de cartes ou de paramétrisations. Fonctions C^∞ sur une sous-variété. Espace tangent en un point. Application linéaire tangente. Rang, Immersions, Submersions, Théorème du rang. Théorème d'inversion locale. Fibré tangent.
- Champs de vecteurs C^∞ , action d'un champ de vecteurs sur une fonction C^∞ . Dérivations et champs de vecteurs. Crochet de deux champs de vecteurs, identité de Jacobi. Champs de vecteurs invariants par un difféomorphisme.
 - Fibré cotangent. Formes différentielles sur une sous-variété de \mathbf{R}^n . Orientation, intégration sur les sous-variétés orientables.

S7 Unité transversale : Introduction à Python (Unité obligatoire)

2h CI sur machine

Chapitre I : Introduction

1. Notion d'algorithme.
2. Opérations élémentaires, Structures conditionnelles, Structures itératives, tableau à une dimension et tableau à deux dimensions.
3. Notion de coût d'un algorithme et classes de complexité. Travaux Dirigés Applications introduisant la notion de coût d'un algorithme.

Travaux Dirigés Applications introduisant la notion de coût d'un algorithme.

Chapitre II: Environnement de développement Python 3

1. Historique et raisons du choix du langage.
2. Mode interactif, mode Script, Aide en ligne.
3. Types élémentaires (classes int, str, float, bool, complex).
4. Opérations élémentaires sur les différents types élémentaires (approche classique/ approche orientée objet).
5. Notion de bibliothèque et import des packages prédéfinis (fonctions de bibliothèque).
6. Instructions élémentaires.
7. Structures conditionnelles.
8. Structures itératives.
9. Présentation des types composés : les types mutables (listes, dictionnaires, ensembles) et non mutables .

Travaux Dirigés Instructions de calculs (opérations arithmétiques, calculs avec import de fonctions prédéfinis,...) en mode interactif (mode console). Ecrire et exécuter des programmes (en utilisant des instructions élémentaires, des structures conditionnelles et des structures itératives) en mode script. Manipulation des types mutables et non mutables.

Remarque : Les parties algorithmiques et programmation seront enseignées en parallèle. A chaque notion algorithmique on associera son équivalent Python.

Acquis : Maîtriser l'environnement Python. – Connaître l'allocation dynamique de la mémoire. – Savoir différencier entre les types mutables et non mutables en important le module copy. – Savoir calculer le coût d'un algorithme et différencier les classes de complexité (linéaire, quadratique, logarithmique, quasi-linéaire, exponentielle...).

Chapitre III: Les sous programmes en algorithmique

1. Fonctions et procédures.
2. Passage de paramètres (Entrée, Sortie, E/S).
3. Variables locales et Variables globales. Chapitre IV : Les fonctions en Python

Chapitre 4 : Les fonctions en Python

1. Définition de fonctions par : déf , lambda
2. Variables locales et variables globales.
3. Notion de fonction locale.
4. Réutilisation de modules (import de fonctions).
5. Gestion des erreurs (bloc Try... Except).
6. Documentation des fonctions.
7. Coût de fonctions et classes de complexité.

Travaux Dirigés : (Programmation Python) Exercices d'Arithmétiques, nombres premiers, nombres parfaits, nombres amis, calcul de PGCD, PPCM, multiplication égyptienne,

Acquis : Savoir écrire un programme itératif. – Maîtriser la programmation modulaire

S8 Unité transversale : Projet : Etude de textes Mathématiques (Unité obligatoire)

2h TD par projet

Un projet, réalisé par un étudiant ou un petit groupe d'étudiants, consiste à étudier un document mathématique (article, un ou plusieurs chapitres d'un livre,...). C'est une occasion pour l'étudiant d'approfondir sa culture mathématique et de s'initier à l'autonomie d'apprentissage. Le travail est encadré par un enseignant-chercheur qui est appelé à introduire à l'étudiant les notions fondamentales du thème retenu.

A la fin du projet, l'étudiant rédige un texte de synthèse de 10 à 15 pages (en LATEX) et fait une présentation orale de son travail. L'évaluation du travail se base sur : qualité de la soutenance orale, profondeur de la compréhension, développement d'exemples, recherches bibliographiques, ...), qualité de la rédaction (mathématique, linguistique et typographique), aisance dans la réaction aux questions.

Contenu des programmes des unités au choix en M1

Parcours : Mathématiques fondamentales

Chaque année, la commission de master choisit les unités d'enseignement UE5 et UE6 de la liste suivante :

- Analyse hilbertienne.
- Probabilités et statistiques.
- Equations différentielles et systèmes dynamiques.
- Théorie de Galois.
- Programmation scientifique.
- Eventuellement, une autre unité (intitulé et programme) proposée par la commission de Master.

Analyse hilbertienne (Unité au choix pour la commission de Master)

(6h CI) ou (3h cours et 3h TD)

- Espaces de Hilbert : Produit scalaire, Orthogonalité, Espaces de Hilbert, Projection sur un convexe fermé non vide, Projection orthogonale, Théorème de Riesz, Bases hilbertiennes et espaces de Hilbert séparables, La convergence faible dans les espaces de Hilbert, Application aux séries de Fourier.
- Opérateurs sur les espaces de Hilbert : opérateurs bornés, opérateurs compacts, adjoint d'un opérateur, opérateurs auto-adjoints, opérateurs de Hilbert-Schmidt.
- Spectre d'un opérateur borné et décomposition spectrale d'un opérateur compact auto-adjoint.
- Equations intégrales et problème de Sturm-Liouville.

Probabilités et statistiques (Unité au choix pour la commission de Master)

(6h CI) ou (3h cours et 3h TD)

- Espace de probabilité, variables aléatoires. Théorème de classe monotone.
- Indépendance, loi du 0-1, théorème de Borel-Cantelli.
- Convergence presque sûre, en probabilités, L_p . Convergence en loi, Théorème de P. Levy. Théorèmes limites : Loi forte des grands nombres et théorème de la limite centrale. Vecteurs gaussiens : caractérisations, propriétés élémentaires. Théorème de la limite centrale pour des vecteurs aléatoires.

- Espérances conditionnelles.
- Introduction à la statistique :
 - Statistique descriptive : généralités, représentations graphiques, valeurs caractéristiques, séries statistiques de deux variables et ajustement.
 - Estimation : Introduction. Estimateur, erreur, intervalle de confiance. Méthode de construction d'un estimateur. Inégalité de Rao-Cramer. estimateur efficace. Le modèle linéaire.
 - Tests d'hypothèses : Introduction. Région de rejet, notion de risque. Exemples de construction de tests paramétriques. Tests sur deux échantillons Gaussiens. Test du khi², test d'ajustement.
 - Travaux pratiques de statistique.

Equations différentielles et systèmes dynamiques (Unité au choix pour la commission de Master)
(6h CI) ou (3h cours et 3h TD)

Objectifs : Développer les énoncés principaux intervenant dans l'étude des équations différentielles ordinaires et présenter quelques concepts fondamentaux des systèmes dynamiques (conjugaison, orbite périodique, récurrente, ensemble-limite, ensemble minimal, stabilité, etc.). C'est l'occasion aussi de revisiter de nombreuses notions en topologie, algèbre linéaire, calcul différentiel, etc.

- **Rappels sur les équations différentielles:**
 - Équations différentielles : définitions et exemples. Notion de solution locale, théorème d'existence et d'unicité , solutions maximales, solutions globales (critères d'extension).

- Équations différentielles linéaires : résolvantes, Wronskien, théorème de Liouville, variation de la constante, résolution explicite dans le cas des coefficients constants.

- **Systemes dynamiques:**

- Généralités: champs de vecteurs et flot d'une équation différentielle autonome, point singulier, orbite, équivalence et conjugaison de deux champs de vecteurs, quelques propriétés générales des flots (théorème de redressement), exemples de flots.

- Propriétés locales: Stabilité des points singuliers au sens de Lyapunov. Fonction de Lyapunov. Linéarisation au voisinage des points singuliers hyperboliques.; théorème de Grobman-Hartman, cas des systèmes dynamiques linéaires dans le plan.

- Propriétés globales: Ensembles-limites, orbite périodique, récurrente, ensemble-limite dans le plan. Section globale, application de Poincaré, suspension d'un difféomorphisme, champs de vecteurs au voisinage d'une orbite périodique; cas d'une surface. Théorie de Poincaré-Bendixson: Théorème de Jordan. Théorème de Poincaré-Bendixson et applications aux cas de la sphère et de la couronne.

Théorie de Galois (Unité au choix pour la commission de Master)

(6h CI) ou (3h cours et 3h TD)

- Extension de corps, degré. Élément algébrique, transcendant. Somme et produit d'éléments algébriques. Extensions algébriques, transcendentes. On fera les rappels nécessaires sur l'arithmétique de $k[X]$.
- Corps de rupture, corps de décomposition, corps finis.
- Clôture algébrique (existence admise, description de F_q). Le corps \mathbb{C} est algébriquement clos.

- Racines de l'unité, polynômes cyclotomiques (irréductibilité), corps cyclotomiques.
- Corps quadratiques. Anneaux d'entiers des corps quadratiques : décomposition des nombres premiers. Loi de réciprocité quadratique. Entiers de Gauss et théorème de deux carrés.
- Théorème de l'élément primitif (en caractéristique nulle, et sur les corps finis).
- Correspondance de Galois (en caractéristique nulle, et sur les corps finis). Exemples de calculs de groupes de Galois.
- Applications : résolution des équations par radicaux, constructibilité à la règle et au compas (caractérisation des nombres constructibles, caractérisation des polygones constructibles).

Programmation scientifique (Unité au choix pour la commission de Master)

3h cours et 3h TD sur machine

Objectif : Introduction à la programmation scientifique en langage C pour la résolution de problèmes mathématiques simples (par exemple : recherche de nombres premiers, résolution d'équations non linéaires, quadratures, résolution d'équations différentielles ordinaires).

Savoir-faire : connaissances de base nécessaires sur le fonctionnement des ordinateurs pour leur utilisation efficace en simulation numérique ; traduction d'algorithmes en codes informatiques ; mise en oeuvre de méthodes numériques pour la résolution de problèmes physiques simples ; validation des résultats ; combinaison des notions acquises pour la résolution de problèmes plus complexes.

- Introduction à la programmation scientifique : enjeux, outils, état de l'art

- Langage C

Généralités (historique, structure d'un programme, règles de base)

Types de données, tableaux, pointeurs, fonctions, entrées/sorties

Opérateurs binaires et unaires bit à bit (décalage du registre à droite, à gauche, xor, et bit à bit, non logique) Headers, Structure, Matrices, Gestion de la mémoire (allocation dynamique)

- Développement de programmes pour la résolution de problèmes numériques de difficulté croissante
- Application à l'intégration d'équations différentielles modélisant des systèmes mécaniques et des phénomènes physiques
- Développement d'un programme comprenant plusieurs modules
- Sensibilisation à la qualité logicielle et à l'optimisation
- Projets

M2

Parcours : Mathématiques Fondamentales

Les unités d'enseignement du semestre 9 sont fixées par chaque commission de Master suivant la ou les spécialités qu'elle propose au début de chaque année.

Une unité d'enseignement peut être constituée d'un seul élément ou de plusieurs.

Le semestre 10 est consacré à l'initiation à la recherche et la préparation d'un mémoire de recherche.