

*REPUBLIQUE TUNISIENNE*

\*\*\*\*

Ministère de l'Enseignement Supérieur  
et de la Recherche Scientifique

\*\*\*\*

DIRECTION GENERALE  
DE LA RENOVATION UNIVERSITAIRE



**LMD**

**Commission Nationale Sectorielle de Mathématiques**

***Master de Recherche en Sciences et Technologies***

***Mention: Mathématiques***

**Juillet 2017**

---

Parcours:  
Mathématiques et applications  
(MA)

---

## Parcours : Mathématiques et Applications (S7)

N°	Unité d'enseignement	Nature et code de l'UE	Elément constitutif (ECUE) de l'UE	Volume horaire / semaine			Crédits		Coefficients		Régime d'examen	
				Cours	TD	TP	ECUE	UE	ECUE	UE	Contrôle continu	Régime mixte / Durée Examen
1	UE-1	Probabilités		6h CI*				7		5		X Exam 3h
2	UE-2	Analyse fonctionnelle		6h CI*				7		5		X Exam 3h
3	UE-3	Analyse de Fourier et distributions		6h CI*				7		5		X Exam 3h
4	UE Optionnelle	Optionnelle (fixée par la commission de Master)		2h				5		3		X Exam 1h 30
5	UE Transversale	Introduction à Python		2h CI				4		2	X	
<b>Total</b>				Total / semaine 22 h.				30		20	X	
				Total / semestre 308 h.								

(\*) ou 3h cours et 3h TD

## Parcours : Mathématiques et Applications (S8)

N°	Unité d'enseignement	Nature et code de l'UE	Elément constitutif (ECUE) de l'UE	Volume horaire / semaine			Crédits		Coefficients		Régime d'examen	
				Cours	TD	T P	ECUE	UE	ECUE	UE	Contrôle continu	Régime mixte / Durée Examen
1	<b>UE-4</b>	Analyse convexe et optimisation		6h CI*				7		5		X Exam 3h
2	<b>UE-5</b>	Unité au choix (voir liste ci-jointe)		6h CI*				7		5		X Exam 3h
3	<b>UE-6</b>	Unité au choix (voir liste ci-jointe)		6h CI*				7		5		X Exam 3h
4	<b>UE Optionnelle</b>	Optionnelle (fixée par la commission de Master)		2h				5		3		X Exam 1h 30
5	<b>UE Transversale</b>	Projet			2h			4		2	X	
<b>Total</b>				Total / semaine 22 h.				30		20	X	
				Total / semestre 308 h.								

(\*) ou 3h cours et 3h TD

## Parcours : Mathématiques et Applications (S9)

N°	Unité d'enseignement	Nature et code de l'UE	Elément constitutif (ECUE) de l'UE	Volume horaire / semaine			Crédits		Coefficients		Régime d'examen	
				Cours	TD	T P	ECUE	UE	ECUE	UE	Contrôle continu	Régime mixte / Durée Examen
1	UE-1	Unité spécifique 1		4h cours				7		5		X Exam 3h
2	UE-2	Unité spécifique 2		4h cours				7		5		X Exam 3h
3	UE-3	Unité spécifique 3		4h cours				7		5		X Exam 3h
4	UE Optionnelle	Optionnelle (fixée par la commission de Master)		2h				5		3		X Exam 1h 30
5	UE Transversale	Projet ou leçon ?			2h			4		2	X	
<b>Total</b>				Total / semaine <b>16 h.</b>				<b>30</b>		<b>20</b>	X	
				Total / semestre <b>224 h.</b>								

# Contenu des programmes des unités obligatoires en M1

## Parcours : Mathématiques et Applications

### **Probabilités (unité obligatoire)** **(6h CI) ou (3h cours et 3h TD)**

- Espace de probabilité, variables aléatoires. Théorème de classe monotone.
- Indépendance, loi du 0-1, théorème de Borel-Cantelli.
- Convergence presque sûre, en probabilités,  $L_p$ . Convergence en loi, Théorème de P. Levy. Théorèmes limites : Loi forte des grands nombres et théorème de la limite centrale. Vecteurs gaussiens : caractérisations, propriétés élémentaires. Théorème de la limite centrale pour des vecteurs aléatoires.
- Espérances conditionnelles.
- Chaines de Markov associée à temps et espace discrets. Propriété de Markov forte. Théorie du potentiel. Récurrence et transience.
- Martingales, sur martingales (à temps discret), inégalités de Doob. Théorème d'arrêt, théorème de convergence presque sûre. Convergence dans  $L^1$  et équi-intégrabilité, convergence dans  $L^p$ .
- Théorème de Birkhoff et applications.

## **Analyse de Fourier et distributions (unité obligatoire)**

**(6h CI) ou (3h cours et 3h TD)**

- Convolution sur  $\mathbb{R}^n$ : approximations de l'unité, régularisation ; densité des fonctions  $C^\infty$  à support compact, espace  $S$  de Schwartz.
- Transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}^n$  et ses propriétés. Transformation de Fourier dans  $S$  et dans  $L^2$ . Théorème d'inversion et Formule de Plancherel.
- Distributions, exemples, dérivée, support, convolution.
- Distributions tempérées, transformée de Fourier d'une distribution tempérée.
- Application de l'analyse de Fourier aux équations aux dérivées partielles.

## **Analyse fonctionnelle (unité obligatoire)**

**((6h CI) ou (3h cours et 3h TD))**

- Rappels et compléments sur les espaces vectoriels normés : rappels sur les evn, équivalence des normes, applications linéaires continues, espace de Banach. Rappels sur la notion de compacité, théorème de Riesz, théorème d'Ascoli.
- Les théorèmes de Hahn-Banach : Forme analytique du théorème de Hahn-Banach (prolongement des formes linéaires), forme géométrique du théorème de Hahn-Banach (séparation d'ensembles convexes).
- Le théorème de Baire et quelques conséquences : Théorème de Baire, théorème de Banach-Steinhaus, théorème de l'application ouverte, théorème du graphe fermé.

- Espace de Hilbert : Définitions et propriétés élémentaires, orthogonalité , projection sur un convexe fermé, théorème de représentation de Riesz, théorème de Lax-Milgram, bases hilbertiennes, convergence faible.
- Espaces de Sobolev et équations elliptiques linéaires : Espaces de Sobolev sur un intervalle, définitions et exemples, approximation, l'espace  $W_{1,p}(I)$ , application aux équations elliptiques en dimension 1, existence et unicité d'une solution faible, régularité de la solution, application au problème avec conditions au bord de type Neumann. Espaces de Sobolev en dimension supérieure, exemples de formulation faible.

### Références :

H. Brézis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Dunod.

F. Hirsch et G. Lacombe, Eléments d'analyse fonctionnelle, cours et exercices avec réponses. Dunod

## **Analyse convexe et optimisation (unité obligatoire)**

**(6h CI) ou (3h cours et 3h TD)**

Objectifs : Savoir mettre en œuvre les algorithmes classiques d'optimisation. Savoir étudier un problème d'optimisation.

- Ensembles convexes, propriétés topologiques et algébriques
- Fonctions convexes, propriétés topologiques et algébriques
- Problèmes d'optimisation : Théorèmes d'existence (dimension finie et cas des espaces de Hilbert)
- Conditions d'optimalité. Cône tangent, conditions génériques, cas sans contrainte, cas de contraintes d'égalités et d'inégalités.
- Quelques algorithmes numériques pour la recherche de solutions optimales (méthodes du gradient à pas fixe et optimal, gradient conjugué, méthodes de pénalisation...).
- Applications au calcul de variations en une dimension.

## S7 Unité transversale Introduction à Python (Unité obligatoire)

### 2h CI sur machine

#### Chapitre I : Introduction

1. Notion d'algorithme.
2. Opérations élémentaires, Structures conditionnelles, Structures itératives, tableau à une dimension et tableau à deux dimensions.
3. Notion de coût d'un algorithme et classes de complexité. Travaux Dirigés Applications introduisant la notion de coût d'un algorithme.

**Travaux Dirigés** Applications introduisant la notion de coût d'un algorithme.

#### Chapitre II: Environnement de développement Python 3

1. Historique et raisons du choix du langage.
2. Mode interactif, mode Script, Aide en ligne.
3. Types élémentaires (classes int, str, float, bool, complex).
4. Opérations élémentaires sur les différents types élémentaires (approche classique/ approche orientée objet).
5. Notion de bibliothèque et import des packages prédéfinis (fonctions de bibliothèque).
6. Instructions élémentaires.
7. Structures conditionnelles.
8. Structures itératives.
9. Présentation des types composés : les types mutables (listes, dictionnaires, ensembles) et non mutables .

**Travaux Dirigés** Instructions de calculs (opérations arithmétiques, calculs avec import de fonctions prédéfinis,...) en mode interactif (mode console). Ecrire et exécuter des programmes (en utilisant des instructions élémentaires, des structures conditionnelles et des structures itératives) en mode script. Manipulation des types mutables et non mutables.

**Remarque :** Les parties algorithmiques et programmation seront enseignées en parallèle. A chaque notion algorithmique on associera son équivalent Python.

**Acquis :** Maîtriser l'environnement Python. – Connaître l'allocation dynamique de la mémoire. – Savoir différencier entre les types mutables et non mutables en important le module copy. – Savoir calculer le coût d'un algorithme et différencier les classes de complexité (linéaire, quadratique, logarithmique, quasi-linéaire, exponentielle...).

#### Chapitre III: Les sous programmes en algorithmique

1. Fonctions et procédures.
2. Passage de paramètres (Entrée, Sortie, E/S).
3. Variables locales et Variables globales. Chapitre IV : Les fonctions en Python

#### **Chapitre 4 : Les fonctions en Python**

1. Définition de fonctions par : déf , lambda
2. Variables locales et variables globales.
3. Notion de fonction locale.
4. Réutilisation de modules (import de fonctions).
5. Gestion des erreurs (bloc Try... Except).
6. Documentation des fonctions.
7. Coût de fonctions et classes de complexité.

**Travaux Dirigés :** (Programmation Python) Exercices d'Arithmétiques, nombres premiers, nombres parfaits, nombres amis, calcul de PGCD, PPCM, multiplication égyptienne,

**Acquis :** Savoir écrire un programme itératif. – Maîtriser la programmation modulaire.

## **S8 Unité transversale : Projet : Etude de textes Mathématiques (Unité obligatoire)**

**2h TD par projet**

Un projet, réalisé par un étudiant ou un petit groupe d'étudiants, consiste à étudier un document mathématique (article, un ou plusieurs chapitres d'un livre,...). C'est une occasion pour l'étudiant d'approfondir sa culture mathématique et de s'initier à l'autonomie d'apprentissage. Le travail est encadré par un enseignant-chercheur qui est appelé à introduire à l'étudiant les notions fondamentales du thème retenu.

A la fin du projet, l'étudiant rédige un texte de synthèse de 10 à 15 pages (en LATEX) et fait une présentation orale de son travail. L'évaluation du travail se base sur : qualité de la soutenance orale, profondeur de la compréhension, développement d'exemples, recherches bibliographiques, ...), qualité de la rédaction (mathématique, linguistique et typographique), aisance dans la réaction aux questions.

## Contenu des programmes des unités au choix en M1

### Parcours :Mathématiques et applications

Chaque année, la commission de master choisit les unités d'enseignement UE5 et UE6 de la liste suivante :

- Géométrie différentielle.
- Equations différentielles et systèmes dynamiques.
- Statistiques.
- Modélisation et simulation numérique des phénomènes physiques
- Programmation scientifique.
- Eventuellement, une autre unité (intitulé et programme) proposée par la commission de Master.

## Géométrie différentielle (unité au choix pour la commission de Master)

(6h CI) ou (3h cours et 3h TD)

- Rappels : Théorème du rang constant pour une fonction de classe  $C^\infty$  définie sur un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ .
- Rappels sur les sous-variétés de  $\mathbf{R}^n$ , différentes caractérisations locales. Exemples.

Paramétrisation, changement de cartes ou de paramétrisations. Fonctions  $C^\infty$  sur une sous-variété. Espace tangent en un point. Application linéaire tangente. Rang, Immersions, Submersions, Théorème du rang. Théorème d'inversion locale. Fibré tangent.

- Champs de vecteurs  $C^\infty$ , action d'un champ de vecteurs sur une fonction  $C^\infty$ . Dérivations et champs de vecteurs. Crochet de deux champs de vecteurs, identité de Jacobi. Champs de vecteurs invariants par un difféomorphisme.
- Fibré cotangent. Formes différentielles sur une sous-variété de  $\mathbf{R}^n$ .
- Orientation, intégration sur les sous-variétés orientables.

## Equations différentielles et systèmes dynamiques

(unité au choix pour la commission de Master)

(6h CI ou 3h cours et 3h TD)

**Objectifs** : Développer les énoncés principaux intervenant dans l'étude des équations différentielles ordinaires et présenter quelques concepts fondamentaux des systèmes dynamiques (conjugaison, orbite périodique, récurrente, ensemble-limite,

ensemble minimal, stabilité, etc.). C'est l'occasion aussi de revisiter de nombreuses notions en topologie, algèbre linéaire, calcul différentiel, etc.

▪ **Rappels sur les équations différentielles:**

• Équations différentielles : définitions et exemples. Notion de solution locale, théorème d'existence et d'unicité , solutions maximales, solutions globales (critères d'extension).

• Équations différentielles linéaires : résolvantes, Wronskien, théorème de Liouville, variation de la constante, résolution explicite dans le cas des coefficients constants.

• Méthodes numériques, généralités sur les méthodes à un pas; consistance, stabilité et convergence. Méthodes d'Euler et du point milieu. Méthode de Runge-Kutta.

▪ **Systèmes dynamiques:**

• Généralités: champs de vecteurs et flot d'une équation différentielle autonome, point singulier, orbite, équivalence et conjugaison de deux champs de vecteurs, quelques propriétés générales des flots (théorème de redressement), exemples de flots.

• Propriétés locales: Stabilité des points singuliers au sens de Lyapunov. Fonction de Lyapunov. Linéarisation au voisinage des points singuliers hyperboliques.; théorème de Grobman-Hartman, cas des systèmes dynamiques linéaires dans le plan.

• Propriétés globales: Ensembles-limites, orbite périodique, récurrente, ensemble-limite dans le plan. Théorie de Poincaré-Bendixson (admis).

• Applications en biologie, mécanique, etc...

## **Statistiques (unité au choix pour la commission de Master)**

**(6h CI ou 3h cours et 3h TD)**

- **ESTIMATION :**
  - Une construction générale d'estimateurs consistants.
  - Consistance de méthodes particulières: méthode des moments, méthode du maximum de vraisemblance, médiane statistique.
  - Normalité asymptotique de ces estimateurs.
  
- **REGION (intervalles) DE CONFIANCE**
  - Construction générale à partir d'une fonction pivotale.
  - Intervalles de confiance asymptotique basés sur estimateurs, comparaison de méthodes.
  
- **TEST D'HYPOTHESES.**
  - Test le plus puissant, lemme de Neyman-Pearson.
  - Test d'hypothèses composites, les tests uniformément plus puissants.
  - Tests dans un modèle gaussien.
  
- **MODELE DE REGRESSION LINEAIRE.**
  - Estimation et régions de confiance.
  - Méthode de moindres carrés.

*Modélisation et simulation numérique des phénomènes physiques*

**(unité au choix pour la commission de Master)**

**3h cours et 3h TD sur machine**

Objectifs ; savoir modéliser des phénomènes physiques classiques à l'aide d'équations aux dérivées partielles, poser le problème mathématique correspondant, résoudre numériquement les problèmes d'équations aux dérivées partielles obtenus.

- Introduction aux modèles fondamentaux : stationnaires (équation de Laplace), propagatifs (transport, ondes), diffusifs (chaleur).
- L'équation de Laplace en dimension 2 : formulation variationnelle pour différents problèmes aux limites, utilisation du théorème de Lax-Milgram, méthodes des éléments finis.
- L'équation de transport en dimension 1 d'espace : méthode des caractéristiques, différences finies.

**Programmation scientifique (Unité au choix pour la commission de Master)**

**3h cours et 3h TD sur machine**

Objectif : Introduction à la programmation scientifique en langage C pour la résolution de problèmes mathématiques simples (par exemple : recherche de nombres premiers, résolution d'équations non linéaires, quadratures, résolution d'équations différentielles ordinaires).

Savoir-faire : connaissances de base nécessaires sur le fonctionnement des ordinateurs pour leur utilisation efficace en simulation numérique ; traduction d'algorithmes en codes informatiques ; mise en oeuvre de méthodes numériques pour la résolution de problèmes physiques simples ; validation des résultats ; combinaison des notions acquises pour la résolution de problèmes plus complexes.

- Introduction à la programmation scientifique : enjeux, outils, état de l'art
- Langage C

Généralités (historique, structure d'un programme, règles de base)

Types de données, tableaux, pointeurs, fonctions, entrées/sorties

Opérateurs binaires et unaires bit à bit (décalage du registre à droite, à gauche, xor, et bit à bit, non logique) Headers, Structure, Matrices, Gestion de la mémoire (allocation dynamique)

- Développement de programmes pour la résolution de problèmes numériques de difficulté croissante
- Application à l'intégration d'équations différentielles modélisant des systèmes mécaniques et des phénomènes physiques
- Développement d'un programme comprenant plusieurs modules
- Sensibilisation à la qualité logicielle et à l'optimisation
- Projets

## M2

### Parcours : Mathématiques et Applications

Les unités d'enseignement du semestre 9 sont fixées par chaque commission de Master suivant la ou les spécialités qu'elle propose au début de chaque année.

Une unité d'enseignement peut être constituée d'un seul élément ou de plusieurs.

Le semestre 10 est consacré à l'initiation à la recherche et la préparation d'un mémoire de recherche.