

# Rapport de fin du contrat postdoctoral

Du 1<sup>er</sup> Décembre 2019 au 30 Novembre 2020, j'ai effectué au sein du laboratoire « Algèbre, Théorie des Nombres et Analyse non linéaire » (code : LR18ES15) un contrat de recherche postdoctoral sous la supervision du Professeur Ali Benhissi, responsable du laboratoire, et financé par l'École Doctorale des Science et Techniques de l'Information (EDSTI) relevant de la Faculté des Sciences de Monastir.

Mon Projet de recherche avait pour objectifs l'étude des anneaux et modules  $S$ -artiniens dans le cas intègre comme dans le cas non intègre. Les anneaux  $S$ -artiniens sont une généralisation récente des anneaux artiniens apparue en 2019, ces généralisations s'inscrivent dans le cadre plus générale de la généralisation des notions algébriques en relation avec la finitude des idéaux et des modules à l'aide des parties multiplicatives.

Ce rapport a pour but de rendre compte des différents travaux effectués dans le cadre de cette année de contrat postdoctoral.

J'ai donc commencé par une étude générale et une recherche bibliographique de tous les résultats connus sur les anneaux artiniens dans la littérature scientifique. Chaque article est décortiqué puis exposé et discuté devant le responsable du projet et des membres du laboratoire. Ensuite j'ai commencé l'étude à proprement parler des anneaux et modules  $S$ -artiniens. Je me suis d'abord placé dans le cadre des anneaux intègres. Dans le cas classique, si l'anneau étudié est intègre en plus d'être artinien alors c'est un corps. Pour le cas des anneaux  $S$ -artiniens, ce n'est plus valide. J'ai donné deux exemples d'anneaux intègres qui ne sont pas des corps et qui sont des anneaux  $S$ -artiniens. J'ai aussi démontré le lien existant entre anneaux  $S$ -artiniens et le corps de fractions de l'anneau des séries formelles sur ces anneaux. J'ai démontré que la classe des anneaux  $S$ -artiniens est une sous-classe stricte des anneaux anti-archimédiens. J'ai aussi trouvé des restrictions sur la dimension de Krull de ces anneaux. Alors qu'un anneau artinien a une dimension de Krull qui est nulle, pour les anneaux  $S$ -artiniens intègres qui ne sont pas des corps, la dimension de Krull est infinie. Alors que les anneaux artiniens peuvent être dénombrables sans être des corps, ceci n'est plus vrai pour les anneaux  $S$ -artiniens intègres. En effet, j'ai démontré qu'un anneau  $S$ -artinien intègre qui est dénombrable est nécessairement un corps.

Pour les modules, je n'ai pas imposé de condition d'intégrité sur les anneaux. J'ai étendu plusieurs résultats classiques concernant les modules artiniens aux modules  $S$ -artiniens, en particulier j'ai démontré qu'un module  $S$ -fini sur un anneau  $S$ -artinien est nécessairement un module  $S$ -artinien. J'ai aussi modifié la définition des modules  $S$ -artiniens pour éviter des cas triviaux et inintéressants. Ces cas se présentent lorsque la partie multiplicative  $S$  contient un annulateur du module qu'on

cherche à étudier, la propriété devient alors triviale puisque par l'ancienne définition le module est automatiquement  $S$ -artinien mais cela ne permet de donner aucun aperçu sur les propriétés de la structure algébrique du module.

Enfin et afin de combiner les résultats trouvés et entamer l'étude du cas des anneaux non intègres, j'ai étudié le cas de l'idéalisation de Nagata. Ces anneaux représentent une classe importante de l'Amalgamation. J'ai démontré que si l'anneau et le module sur l'anneau considéré sont tous deux  $S$ -artinien (pour la même partie multiplicative) alors cela est équivalent au fait que l'idéalisation de Nagata construite avec l'anneau et le module est elle même un anneau  $S$ -artinien. En particulier si le module est  $S$ -fini, alors l'équivalence est restreinte entre l'anneau et l'idéalisation.

Tous ces résultats ont mené à la rédaction d'un article scientifique intitulé « On  $S$ -artinian rings and modules ». Je comptais aussi participer à des conférences scientifiques pour exposer ces résultats mais la situation de pandémie mondiale a mené à l'annulation de la quasi-totalité des conférences scientifiques (dont le congrès de la SMT). Cette même situation a fortement pénalisé la tenue des exposés au sein du laboratoire suite aux différentes restrictions sur le déplacement, la fermeture des institutions d'enseignement supérieur et les confinements imposés par le gouvernement pour endiguer la propagation de l'épidémie sur le territoire national.

En espérant que ce rapport de fin de contrat rende utilement compte de toutes les tâches et activités effectuées tout au long de l'année universitaire 2019-2020, je tiens à remercier les membres du laboratoire de recherche « Algèbre, Théorie des Nombres et Analyse non linéaire » en particulier le Professeur Ahmed Hamed ainsi que le responsable du laboratoire, Professeur Ali Benhissi, pour leur aide inestimable pour bien mener les travaux de recherches.

Walid Maaref

Docteur en Mathématiques

Faculté des Sciences de Monastir

