Sur la régularité des solutions d'équations et de systèmes elliptiques

Dans ce cours, on s'intéresse à la résolution d'équations elliptiques avec divers types de conditions aux limites :

- Dirichlet
- Neumann
- Fourier-Robin

ou de systèmes d'équations elliptiques avec des conditions aux limites :

- Dirichlet
- Navier
- type Navier

On étudiera l'existence, l'unicité et la régularité des solutions :

- solutions faibles
- solutions fortes
- solutions très faibles

Cette régularité dépendra, comme on le verra, des données du problème et en particulier de la régularité du domaine. Par souci de clarté et de simplification, on examinera deux problèmes modèles, l'un faisant intervenir le laplacien et l'autre l'opérateur de Stokes.

Cours I

Espaces de Sobolev, Inégalités et problèmes de Dirichlet et de Neumann pour le laplacien. Partie I

1. Espaces de Sobolev

On introduit les espaces de Sobolev suivants:

- $W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) ;\ \forall |\alpha| \leq m,\ D^\alpha u \in L^p(\Omega) \}$
- $W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m,p}(\Omega) ;\ \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{N+\sigma p}} < \infty ,\ \forall |\alpha| = m \right\}$

où $m \in \mathbb{N}$, $s = m + \sigma$, $0 < \sigma < 1$, $1 < p < \infty$

et Ω ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$.

Munis de la norme du graphe, ce sont des espaces de Banach.

* Cas spécifique $\Omega = \mathbb{R}^N$

- Pour $s \in \mathbb{R}$, on définit l'espace de Hilbert

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) ;\ \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}$$

Proposition 1.

Pour tout $s \geq 0$, on a

$$H^s(\mathbb{R}^N) = W^{s,2}(\mathbb{R}^N)$$

où l'identité est algébrique et topologique.

Définition.

Pour tout $s > 0$, on pose

$$W_0^{s,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}}$$

et son dual topologique

$$W^{-s,p'}(\Omega) = \left[W_0^{s,p}(\Omega) \right]'$$

où p' est le conjugué de p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Notations.

Si $p = 2$ et $s \geq 0$, on notera

$$W^{s,2}(\Omega) = H^s(\Omega)$$

$$W_0^{s,2}(\Omega) = H_0^s(\Omega),$$

$$H^{-s}(\Omega) = \left[H_0^s(\Omega)\right]'$$

Proposition 2

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors $T \in W^{-m,p'}(\Omega)$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ ssi $T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha$, avec $f_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$

2. Premières propriétés

On supposera à partir de maintenant que

Ω est un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^N$

Définition

$$\mathcal{D}(\bar{\Omega}) = \{ v|_\Omega \; ; \; v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \}$$

Théorème 3

i) $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $W^{s,p}(\Omega)$ pour tout $s > 0$ (vrai même si Ω est non borné)

ii) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Conséquence :

$$\forall s > 0, \quad W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N) = W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$$

et $W^{-s,p'}(\mathbb{R}^N) = [W^{s,p}(\mathbb{R}^N)]'$

Attention :

En général pour $s > 0$

$$W_0^{s,p}(\Omega) \subsetneq W^{s,p}(\Omega)$$

Définition :

Pour $s>0$, on pose

$$\widetilde{W}^{s,p}(\Omega) = \{ u \in W^{s,p}(\Omega) ; \; \tilde{u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \}$$

où $\tilde{u}$ est le prolongement par 0 de u en dehors de Ω.

L'espace $\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$ est un Banach pour la norme

$$\|u\|_{\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)} = \|\tilde{u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}$$

Remarque

i) On vérifie facilement que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \widetilde{W}^{m,p}(\Omega) \qquad (1)$$

De plus, on montre que

$$\|u\|_{\widetilde{W}^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \qquad (2)$$

ii) Si $s = m+\sigma$ avec $0<\sigma<1$, on montre que

$$\|u\|_{\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)} \simeq \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \left\| \frac{D^\alpha u}{\rho^\sigma} \right\|_{L^p(\Omega)} \qquad (3)$$

Densité

Théorème 7

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$ pour tout $s>0$ (résultat vrai même si Ω est non borné)

Conséquence

On déduit de (1), (2) et de la définition de l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \widetilde{W}^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega) \qquad (4)$$

Théorème 5

Pour tout $0 < s \leq \frac{1}{p}$, on a

$\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W^{s,p}(\Omega)$

i.e

$$\forall\ 0 < s \leq \frac{1}{p}, \quad W_0^{s,p}(\Omega) = W^{s,p}(\Omega) \qquad (5)$$

Notation

$$\rho(x) = d(x, \Gamma) \quad \text{où} \quad \Gamma = \partial\Omega$$

Théorème 6

Soit $0 < s \leq 1$ et $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$.

Alors

$$\frac{u}{\rho^s} \in L^p(\Omega) \iff s \neq \frac{1}{p}$$

et

$$\left\| \frac{u}{\rho^s} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C \, |u|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

Remarque

Le cas $s = 1$ est connue sous le nom d'inégalité de Hardy :

$$\left\| \frac{u}{\rho} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)}$$

pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Utilisant à nouveau une inégalité de Hardy, on montre le

Théorème 7

Soit $s > 0$ et $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$.

Alors, pour tout $|\alpha| \leq s$, on a

$$\frac{D^\alpha u}{\rho^{s-|\alpha|}} \in L^p(\Omega) \iff s - \frac{1}{p} \notin \mathbb{N} \quad (6)$$

De (3) et (6) on déduit le

Corollaire 8

Supposons $s > 0$ et $s - \frac{1}{p} \notin \mathbb{N}$.

Alors

$$\tilde{W}^{s,p}(\Omega) = W_0^{s,p}(\Omega). \qquad (7)$$

Proposition 9

i) Pour tout $1 \leq j \leq N$, l'opérateur

$$\frac{\partial}{\partial x_j} : W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow W^{s-1,p}(\mathbb{R}^N) \qquad (8)$$

est continu pour tout $s \in \mathbb{R}$

ii) Si on remplace $\mathbb{R}^N$ par Ω, la propriété (8) a lieu sauf si $s = \frac{1}{p}$

Idée de preuve du point ii)

- cas $s = m + \sigma$, avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq \sigma < 1$ (i.e $s \geq 1$)

Alors

$$u \in W^{s,p}(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in W^{m,p}(\Omega) \text{ et } \displaystyle\iint_{\Omega\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{N+\sigma p}} < \infty \\ \forall\ |\alpha| = m \end{cases}$$

D'où

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \in W^{m-1,p}(\Omega) \text{ et } \iint_{\Omega\,\Omega} \frac{|D^\alpha \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) - D^\alpha \frac{\partial u}{\partial x_j}(y)|^p}{|x-y|^{N+\sigma p}} < \infty$$

pour tout $|\alpha| = m-1$. Et donc $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in W^{s-1,p}(\Omega)$

- <u>cas $s \leq 0$</u>

Soit $u \in W^{s,p}(\Omega) = \left[W_0^{-s,p'}(\Omega)\right]'$

$$= \left[W_0^{m+\sigma,p'}(\Omega)\right]'$$

Maintenant, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$\left|\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}\right| = \left| -\left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}\right|$$

$$\leq \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right\|_{W_0^{-s,p'}(\Omega)}$$

$$\leq \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \|\varphi\|_{W_0^{-s+1,p'}(\Omega)}$$

car $-s+1 \geq 1$ et i). On termine en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{-s+1,p'}(\Omega)$.

- <u>cas $0 < s < 1$</u>

Soit $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Rappelons que Ω étant borné lipschitz, il existe un opérateur $\forall t \geq 0$, $P : W^{t,p}(\Omega) \longrightarrow W^{t,p}(\mathbb{R}^N)$

linéaire continu et vérifiant

$$Pv|_\Omega = v \quad , \quad v \in W^{t,p}(\Omega)$$

De sorte que $Pu \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ et par conséquent $\frac{\partial}{\partial x_j} Pu \in W^{s-1,p}(\mathbb{R}^N)$. Mais

$$\left(\frac{\partial Pu}{\partial x_j}\right)\Big|_\Omega = \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

i.e $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ est la restriction à Ω de la distribution $T = \frac{\partial Pu}{\partial x_j} \in W^{s-1,p}(\mathbb{R}^N)$. Plus précisément,

on a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} = \langle T, \tilde{\varphi} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)}$$

Ce qui implique que

$$\left|\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle\right| \leq \|T\|_{W^{s-1,p}(\mathbb{R}^N)} \|\tilde{\varphi}\|_{W^{1-s,p'}(\mathbb{R}^N)}$$

$$= \|T\|_{W^{s-1,p}(\mathbb{R}^N)} \|\varphi\|_{\tilde{W}^{1-s,p'}(\Omega)}$$

Ceci montre que $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in \left[\tilde{W}^{1-s,p'}(\Omega)\right]'$

Mais

$$\left[\tilde{W}^{1-s,p'}(\Omega)\right]' = \left[W_0^{1-s,p'}(\Omega)\right]'$$

ssi $1-s \neq \frac{1}{p'}$, i.e $s \neq \frac{1}{p}$.

Remarque

La preuve précédente montre que

$$u \in W^{\frac{1}{p},p}(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j} \in \left[\widetilde{W}^{\frac{1}{p'},p'}\right]'$$

En particulier

$$u \in H^{1/2}(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j} \in \left[\widetilde{H}^{1/2}(\Omega)\right]'$$

où l'on remarque aussi que

$$\widetilde{H}^{1/2}(\Omega) \underset{\text{dense}}{\hookrightarrow} H^{1/2}(\Omega) = H_0^{1/2}(\Omega)$$

$$\Downarrow$$

$$H^{-1/2}(\Omega) = \left[H_0^{1/2}(\Omega)\right]' \hookrightarrow \left[\widetilde{H}^{1/2}(\Omega)\right]'.$$

Corollaire 10

Soit $s > 0$. On a la caractérisation suivante :

$$u \in \widetilde{W}^{s,p}(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in W_0^{s,p}(\Omega) \text{ et } \forall |\alpha| = m \\ \dfrac{D^\alpha u}{\rho^\sigma} \in L^p(\Omega) \end{cases}$$

où $s = m + \sigma$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq \sigma < 1$

3. Traces

Tout d'abord, rappelons que

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^N) \quad \text{si } s > \frac{N}{p}$$

De sorte que si $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ avec $s > \frac{N}{p}$, il est raisonnable de parler de la restriction de u à l'hyperplan $x_N = 0$. Mais la continuité de u par rapport à l'ensemble des variables n'est pas nécessaire. Il suffit d'avoir la continuité de u par rapport à la variable x_N. Ce qui est possible dès que $s > \frac{1}{p}$.

En fait, on a le

Théorème 11

On suppose que

$$s - \frac{1}{p} = k + \sigma \quad , k \in \mathbb{N} \ , 0 < \sigma < 1$$

(ce qui implique en particulier que $s - \frac{1}{p} \notin \mathbb{N}$)

Alors, l'application

$$u \xmapsto{\gamma} (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_k u)$$

où

$$\gamma_0 u(x') = u(x', 0) \quad , \; x' = (x_1, \dots, x_{N-1})$$

$$\gamma_j u(x') = \frac{\partial^j u}{\partial x_N^j}(x', 0)$$

définie pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ possède une extension unique continue de

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \text{ dans } \prod_{j=0}^{k} W^{s-j-1/p,\,p}(\mathbb{R}^{N-1})$$

(où k = partie entière de $s > 0$).

De plus, cet opérateur a un inverse R à droite continu :

$$\begin{cases} \forall\, \vec{g} = (g_0, \dots, g_k) \in \prod_{j=0}^{k} W^{s-j-1/p,\,p}(\mathbb{R}^{N-1}), \\ \gamma_0 R \vec{g} = \vec{g} \\ \|R\vec{g}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C_N \sum_{j=0}^{k} \|g_j\|_{W^{s-j-1/p,\,p}(\mathbb{R}^{N-1})} \end{cases}$$

<u>Remarque</u>

Si $p = 2$, on procède par Fourier.

Ce résultat peut s'étendre lorsque $\mathbb{R}^{N-1}$ est remplacé par le bord Γ de Ω, à condition que Ω soit suffisament régulier

<u>Définition</u>

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On dira que Ω est lipschitzien (respectivement de classe $C^{k,1}$, $k \in \mathbb{N}$) si tout $x \in \Gamma$ possède un voisinage V de x dans $\mathbb{R}^N$ et un système de coordonnées $\{y_1, \dots, y_N\}$ tel que

i) V est un hypercube

$$V = \{ (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N ; \; |y_j| < a_j , \; 1 \leq j \leq N \}$$

ii) il existe une fonction φ et φ^{-1} lipschitziennes (resp^t $C^{k,1}$) définie dans

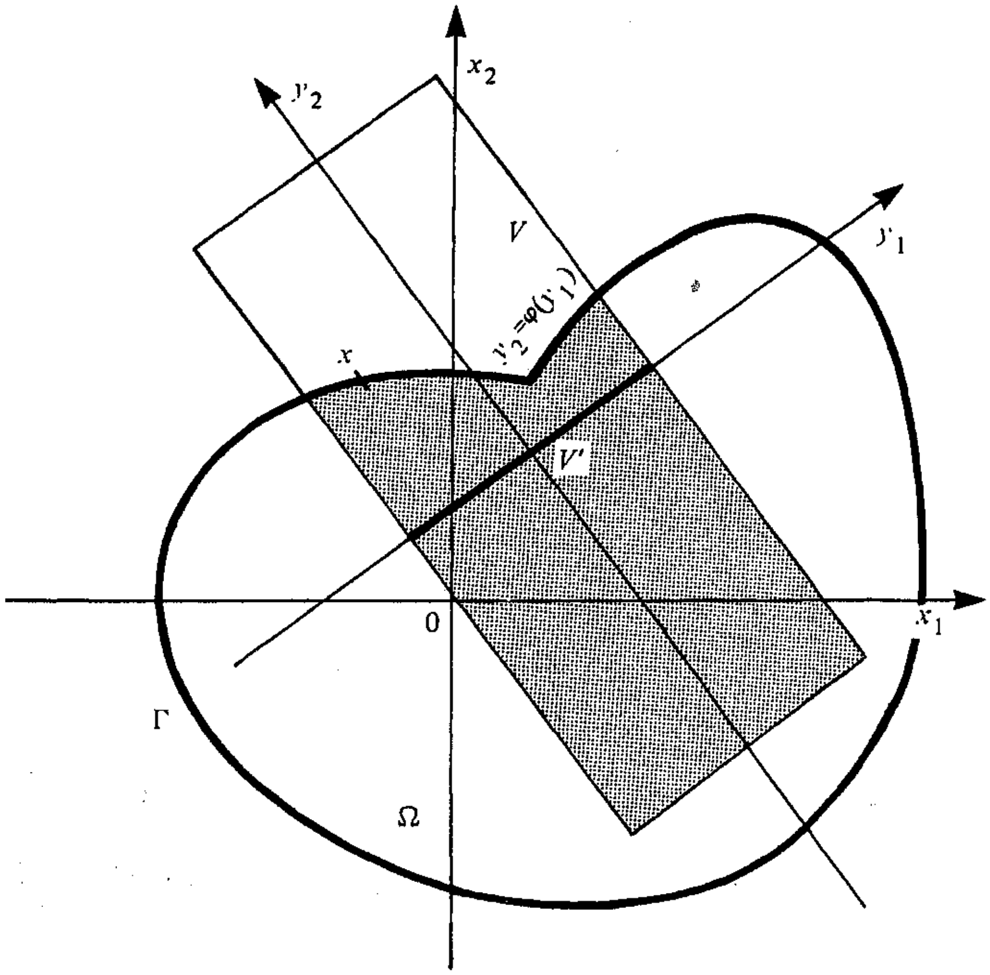
$$V' = \{ y' \in \mathbb{R}^{N-1} ; \; |y_j| < a_j , \; 1 \leq j \leq N-1 \}$$

et telle que

$$|\varphi(y')| \leq \frac{1}{2} a_N \qquad \forall y' \in V'$$

$$\Omega \cap V = \{ (y', y_N) \in V ; \; y_N < \varphi(y') \}$$

$$\Gamma \cap V = \{ (y', y_N) \in V ; \; y_N = \varphi(y') \}$$



x_2
y_2
V
y_1
$y_2=\varphi(y_1)$
x
V'
0
x_1
Γ
Ω

Soit

$$\Phi : \begin{array}{ccc} y' & \longmapsto & (y', \varphi(y')) \\ V' & \longrightarrow & \Gamma \cap V \end{array}$$

<u>Définition</u>

On suppose Ω ouvert borné de classe $C^{k,1}$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Soit $0 < s \leq k+1$. On définit l'espace

$$W^{s,p}(\Gamma) = \{u \in \mathcal{D}'(\Gamma) ; \ u \circ \Phi \in W^{s,p}(V' \cap \Phi^{-1}(\Gamma \cap V))$$

pour tout couple (V, φ) vérifiant la définition précédente.

Etant donné (V_j, φ_j), $1 \leq j \leq J$, un atlas de Γ pour lequel chaque couple (V_j, φ_j) vérifie la définition ci-dessus, une manière possible de définir une norme sur $W^{s,p}(\Gamma)$ consiste à poser :

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Gamma)} = \sum_{j=1}^{J} \|u \circ \Phi_j\|_{W^{s,p}(V_j' \cap \Phi_j^{-1}(\Gamma \cap V_j))}$$

qui est équivalente lorsque $0 < s < 1$ à la norme

$$\left(\|u\|^p_{L^p(\Gamma)} + \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N-1+sp}} \, d\sigma_x \, d\sigma_y \right)^{1/p}.$$

On est maintenant en mesure d'étendre le théorème 11 de traces du cas $\mathbb{R}^{N-1}$ au cas d'une frontière Γ suffisamment régulière, par un simple changement de variables.

Si localement, Γ est représentée par le couple (V, φ) et si φ est lipschitzienne alors on peut définir un vecteur normal unité extérieur à Γ comme suit:

$$\vec{\nu}(y', \varphi(y')) = \frac{(-\nabla'\varphi(y'), 1)}{\sqrt{1 + |\nabla'\varphi(y')|^2}} \quad , y' \in V'$$

On peut ensuite étendre ce vecteur dans tout V en posant

$$\vec{\nu}(y', y_N) = \vec{\nu}(y', \varphi(y')) \quad , y \in V.$$

Comme $\Gamma \subset \bigcup_{j=1}^{J} V_j$, on sait qu'il existe des fonctions $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_J \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ telles que

- $\forall j = 0, \dots, J$, $0 \leq \theta_j \leq 1$ et $\sum_{j=0}^{J} \theta_j = 1$

- $\text{supp}\, \theta_j$ est compact et $\text{supp}\, \theta_j \subset V_j$, $j \geq 1$

  $\text{supp}\, \theta_0 \subset \Omega \setminus \Gamma$

Cette partition de l'unité permet alors d'étendre $\vec{\nu}$ dans un voisinage de $\overline{\Omega}$ en écrivant

$$\vec{\nu} = \sum_{j=0}^{J} (\theta_j \vec{\nu})$$

Il est alors facile de vérifier que

$\vec{\nu} \in L^\infty(\overline{\Omega})$ si Γ est lipschitz

et $\vec{\nu} \in \mathcal{C}^{k-1,1}(\overline{\Omega})$ si Γ est $\mathcal{C}^{k,1}$.

On est maintenant prêt pour établir le résultat suivant :

<u>Théorème 12</u> (<u>Traces</u>)

Soit Ω un ouvert borné de classe $C^{k,1}$ de $\mathbb{R}^N$, avec $k \in \mathbb{N}$. Soit $s > 0$ vérifiant

$$s \leq k+1 \quad \text{et} \quad s - \frac{1}{p} = \ell + \sigma$$

avec $0 < \sigma < 1$ et $\ell \in \mathbb{N}$.

Alors l'application

$$u \xrightarrow{\gamma} (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_\ell u)$$

définie pour $u \in C^{k,1}(\bar{\Omega})$ peut s'étendre de manière unique en une application linéaire continue de

$$W^{s,p}(\Omega) \text{ dans } \prod_{j=0}^{\ell} W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$$

où

$$\gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = \nabla u \cdot \vec{\nu} \;, \quad \gamma_j u = \frac{\partial^j u}{\partial \vec{\nu}^j}$$

De plus, cet opérateur a un inverse à droite continu (indépendant de p)

Cas Ω Lipschitz

$\frac{1}{p} < s \leq 1$,

- $u \in W^{s,p}(\Omega) \Rightarrow u|_\Gamma \in W^{s-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$
- $g \in W^{s-\frac{1}{p},p}(\Gamma) \Rightarrow \begin{cases} \exists\, u \in W^{s,p}(\Omega) \text{ tel que} \\ u = g \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$

avec

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C \, \|g\|_{W^{s-\frac{1}{p},p}(\Gamma)}$$

Cas Ω $C^{1,1}$

i) Soit $u \in W^{s,p}(\Omega)$

Si $\frac{1}{p} < s \leq 2$, alors $u|_\Gamma \in W^{s-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$

De plus, pour tout $g \in W^{s-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$,

il existe $u \in W^{s,p}(\Omega)$ tel que $u = g$

sur Γ, avec $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C\|g\|_{W^{s-\frac{1}{p},p}(\Gamma)}$

ii) Soit $u \in W^{s,p}(\Omega)$

Si $1+\frac{1}{p} < s \leq 2$, alors $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \in W^{s-1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$

De plus, pour tout $g_0 \in W^{s-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ et

$g_1 \in W^{s-1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$, il existe $u \in W^{s,p}(\Omega)$

tel que

$$u = g_0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = g_1 \quad \text{sur } \Gamma$$

avec

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C\left(\|g_0\|_{W^{s-\frac{1}{p},p}(\Gamma)} + \|g_1\|_{W^{s-1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)}\right)$$

Remarque.

Les relèvements précédents sont uniques à un élément près de $W_0^{s,p}(\Omega)$. En effet, lorsque $s-\frac{1}{p} \notin \mathbb{N}$, l'espace $W_0^{s,p}(\Omega)$ peut se caractériser de la manière suivante lorsque Ω est de classe $C^{k,1}$:

$$W_0^{s,p}(\Omega) = \{ u \in W^{s,p}(\Omega) \ ; \ \gamma_0 u = \gamma_1 u = \dots = \gamma_\ell u = 0 \}$$

où $s \leq k+1$

$$s - \frac{1}{p} = \ell + \sigma, \quad \ell \in \mathbb{N}, \quad 0 < \sigma < 1$$

4. Interpolation

On se contentera ici d'examiner le cas des espaces $H^s(\Omega)$, avec Ω ouvert borné lipschitzien.

Rappelons d'abord qu'il existe un opérateur de prolongement pour tout $s \geq 0$:

$$P : H^s(\Omega) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^N)$$

linéaire et continue, vérifiant :

$$Pu\big|_{\Omega} = u \quad , \quad \forall\, u \in H^s(\Omega)$$

Théorème 13 (Inégalité d'interpolation)

Soient s_1, s_2, s_2 avec $0 \leq s_1 < s_2 < s_3$. Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \|u\|_{W^{s_2,p}(\Omega)} \leq \varepsilon \|u\|_{W^{s_3,p}(\Omega)} + K \varepsilon^{-(s_2-s_1)/(s_3-s_2)} \|u\|_{W^{s_1,p}(\Omega)}$$

où $K = K(\Omega, s_1, s_2, s_3, p)$

Remarque

L'inégalité ci-dessus est une conséquence directe de l'injection compacte de $W^{s_3,p}(\Omega)$ dans $W^{s_2,p}(\Omega)$.

Rappelons que si

- $\underline{m \in \mathbb{N}}$, $H^m(\Omega)$ peut être défini de plusieurs manières différentes :

  $*$ $u \in H^m(\Omega) \iff \forall\, |\alpha| \leq m,\ D^\alpha u \in L^2(\Omega)$

  $*$ $u \in H^m(\Omega) \iff u = U|_\Omega$ avec $U \in H^m(\mathbb{R}^N)$

  $*$ si $\Omega = \mathbb{R}^N$, $u \in H^m(\mathbb{R}^N) \iff u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}\, \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$

- $\underline{s = m + \sigma}$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < \sigma < 1$

  $*$ $u \in H^m(\Omega)$ et $\forall\, |\alpha| = m$, $\displaystyle\iint_{\Omega\,\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{N+2\sigma}} < \infty$

  $*$ $u = U|_\Omega$, $U \in H^s(\mathbb{R}^N)$

  $*$ si $\Omega = \mathbb{R}^N$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $(1+|\xi|^2)^{s/2}\, \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$

  $*$ $H^s(\Omega) = [H^m(\Omega), L^2(\Omega)]_\theta$, $0 < \theta < 1$, $(1-\theta)m = s$

où l'on notera la propriété de réitération :

$$[H^{s_1}(\Omega), H^{s_2}(\Omega)]_\theta = H^{(1-\theta)s_1 + \theta s_2}(\Omega)$$
$$0 < \theta < 1$$

Concernant les espaces $H^s_0(\Omega)$ ou $\widetilde{H}^s(\Omega)$:

- $\underline{m \in \mathbb{N}}$

$*$ $u \in H^m_0(\Omega) \iff u \in H^m(\Omega)$ et $u = \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = \dots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \vec{\nu}^{m-1}} = 0$ sur Γ

$*$ $u \in H^m_0(\Omega) \iff \begin{cases} u = \lim_k u_k \text{ dans } H^m(\Omega) \\ \text{avec } u_k \in \mathcal{D}(\Omega) \end{cases}$

$*$ $u \in H^m_0(\Omega) \iff \tilde{u} \in H^m(\mathbb{R}^N) \iff u \in \widetilde{H}^m(\Omega)$

$*$ $u \in H^m_0(\Omega) \iff \forall\, |\alpha| \leq m,\ \frac{D^\alpha u}{\rho^{m-\alpha}} \in L^2(\Omega)$

- $\underline{s = m + \sigma}$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < \sigma < 1$

$*$ $H^s_0(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}}$ et

$u \in \widetilde{H}^s(\Omega) \iff \tilde{u} \in H^s(\mathbb{R}^N)$

$*$ $H^s_0(\Omega) = \widetilde{H}^s(\Omega) \iff s - \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

$*$ $u \in H^s_0(\Omega)$ (avec $\sigma \neq \frac{1}{2}$) $\iff u \in H^m_0(\Omega)$

et $\forall\, |\alpha| = m,\ \frac{D^\alpha u}{\rho^{1/2}} \in L^2(\Omega)$

$u \in \widetilde{H}^s(\Omega) \iff u \in H^s_0(\Omega)$ et $\forall\, |\alpha| = m,\ \frac{D^\alpha u}{\rho^{1/2}} \in L^2(\Omega)$

$$* \quad [H_0^{s_1}(\Omega), H_0^{s_2}(\Omega)]_\theta = H_0^{(1-\theta)s_1+\theta s_2}(\Omega)$$

$$\text{si } (1-\theta)s_1 + \theta s_2 - \tfrac{1}{2} \notin \mathbb{N}$$

$$[H_0^{s_1}(\Omega), H_0^{s_2}(\Omega)]_\theta = \widetilde{H}^{(1-\theta)s_1+\theta s_2}(\Omega)$$

sinon

<u>Notation de Lions - Magenes</u> : $\widetilde{H}^s(\Omega) = H_{00}^s(\Omega)$ (spécifique au cas où $s - \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$)

<u>Quelques cas particuliers</u>

- $\widetilde{H}^{1/2}(\Omega) = H_{00}^{1/2}(\Omega) \hookrightarrow H_0^{1/2}(\Omega) = H^{1/2}(\Omega)$
- $\widetilde{H}^{3/2}(\Omega) = H_{00}^{3/2}(\Omega) \hookrightarrow H_0^{3/2}(\Omega) = H^{3/2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^{3/2}(\Omega)$
- $[H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)]_{1/2} = \widetilde{H}^{1/2}(\Omega)$ et $[L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega)]_{1/2} = [\widetilde{H}^{1/2}(\Omega)]'$
- si Ω lipschitz et $u \in H^s(\Omega)$, $\frac{1}{2} < s \leq 1$
  alors $u|_\Gamma \in H^{s-1/2}(\Gamma)$
- si Ω $C^{1,1}$ et $u \in H^s(\Omega)$, $\frac{3}{2} < s \leq 2$
  alors $u|_\Gamma \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \in H^{s-\frac{3}{2}}(\Gamma)$

<u>Remarque</u> : Nous verrons + loin qu'on peut améliorer ces résultats

5. Transposition

Soient V et H deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{L}(V; H)$.

Pour tout $g \in H'$ fixé, on considère l'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & \langle g, Ax \rangle_{H' \times H} \\ V & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

qui définit ainsi une forme linéaire continue sur V qu'on notera ${}^tA g$:

$$\langle {}^tA g, x \rangle_{V' \times V} = \langle g, Ax \rangle_{H' \times H}$$

Remarque.

Si $A : V \longrightarrow H$ est un isomorphisme, alors on peut définir le transposé de A^{-1} et on vérifie facilement que

$${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$$

et

$${}^tA : H' \longrightarrow V'$$

est un isomorphisme.

6. Inégalités

Elles constituent des outils fondamentaux dans l'étude d'équations aux dérivées partielles.

- **Inégalité de Poincaré**

Soit Ω un ouv^t borné dans au moins une direction. Alors il existe une constante $C(\operatorname{diam} \Omega) \geqslant 0$ telle que

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

- **Inégalité de Poincaré-Wirtinger**

Soit Ω un ouvert borné, connexe et lipschitzien. Alors, il existe une constante $C(\Omega) \geqslant 0$ telle que

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega), \quad \inf_{k \in \mathbb{R}} \|u + k\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega) \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

- **Inégalité de Hardy**

Soit Ω un ouvert borné lipschitzien. Alors, il existe une constante $C(\Omega) \geqslant 0$ telle que

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \left\| \frac{u}{\rho} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega) \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

- **Inégalité de Calderon-Zygmund :**

$$\forall u \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p,\Omega) \|\Delta u\|_{L^p(\Omega)}$$

6. Solutions faibles

Considérons les problèmes suivants :

$$(P_D) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

et

$$(P_N) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = h & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné lipschitzien ; f, g et h sont données.

Résolution du problème de Dirichlet (P_D)

Théorème 14

Pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ le problème (P_D) possède une solution unique $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant en outre l'estimation

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\Omega)\left(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\right)$$

Preuve :

On commence par relever la condition aux limites de Dirichlet, grâce au Théorème 12 (théorème de traces) :

$$\exists\, u_g \in H^1(\Omega) \text{ tel que } u_g = g \text{ sur } \Gamma$$

$$\|u_g\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\Omega)\, \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

On pose

$$f_g = -\Delta u_g = -\operatorname{div} \nabla u_g \in H^{-1}(\Omega)$$

d'après Proposition 9 ii). On cherchera alors u sous la forme $u = u_g + v$, avec

$$(P_D^\circ) \begin{cases} -\Delta v = f - f_g & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

On montre ensuite que le problème

(*) Trouver $v \in H_0^1(\Omega)$ solution de (P_D°)

est équivalent à la formulation variationnelle suivante :

$$(FV)_D \begin{cases} \text{Trouver } v \in H^1_0(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall \varphi \in H^1_0(\Omega), \int_\Omega \nabla v . \nabla \varphi = \langle f - f_g, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H^1_0(\Omega)} \end{cases}$$

Ce dernier problème possède une solution unique en appliquant le lemme de Lax-Milgram ou bien le théorème de Riesz.

On note que la forme bilinéaire

$$a(v, \varphi) = \int_\Omega \nabla v . \nabla \varphi$$

est continue sur $H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$, coercive sur $H^1_0(\Omega)$ grâce à l'inégalité de Poincaré

Par ailleurs, cette forme permet de définir un produit scalaire sur l'espace de Hilbert $H^1_0(\Omega)$. ▨

Remarque :

i) Si Ω est de classe $C^{1,1}$, $f \in W^{-1,p}(\Omega)$, $g \in W^{1-1/p,p}(\Gamma)$ avec $1 < p < \infty$, alors $\exists !\, u \in W^{1,p}(\Omega)$ sol. de (P_D).

ii) Si Ω est seulement lipschitz, le résultat reste vrai pour $p \in]2-\varepsilon', 2+\varepsilon[$ où ε et $\varepsilon' > 0$ dépendent de Ω.

Concernant le problème de Neumann, la démarche est un peu plus compliquée. En effet si on cherche une solution $u \in H^1(\Omega)$ seulement, la condition aux limites portant sur la dérivée normale n'a pas de sens, puisque les fonctions de $L^2(\Omega)$ n'ont en général pas de trace au bord ! Ici, en fait, si on pose $\vec{v} = \nabla u$, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \vec{v} . \vec{n} \quad \text{sur } \Gamma$$

<u>Définition</u> :

$$H(\mathrm{div}; \Omega) = \left\{ \vec{v} \in L^2(\Omega) ; \ \mathrm{div}\, \vec{v} \in L^2(\Omega) \right\}$$

Cet espace est un Hilbert pour le produit scalaire

$$((\vec{v}, \vec{w}))_{H(\mathrm{div}; \Omega)} = \int_\Omega \vec{v} . \vec{w} + \int_\Omega (\mathrm{div}\, \vec{v})(\mathrm{div}\, \vec{w})$$

Proposition 15.

i) $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H(\mathrm{div};\Omega)$

ii) L'application linéaire

$$\vec{v} \longmapsto \vec{v}.\vec{n},$$

définie sur $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^N$; peut s'étendre de manière unique en une application linéaire continue de $H(\mathrm{div};\Omega)$ dans

$$H^{-1/2}(\Gamma) \stackrel{\text{déf}}{=} [H^{1/2}(\Gamma)]'$$

iii) De plus, on a la formule de Green (ou formule de Stokes) :

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega), \vec{v} \in H(\mathrm{div};\Omega),$$

$$\int_\Omega \vec{v}.\nabla\varphi + \int_\Omega \varphi \,\mathrm{div}\,\vec{v} = \langle \vec{v}.\vec{n}, \varphi\rangle_\Gamma$$

où $\langle \cdot,\cdot\rangle_\Gamma$ désigne le crochet $H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$

Corollaire 16

Soit $u \in H^1(\Omega)$ tel que $\Delta u \in L^2(\Omega)$. Alors

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \in H^{1/2}(\Gamma).$$

De plus, pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$, on a la formule de Green:

$$\int_\Omega \varphi \Delta u + \int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi = \left\langle \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}, \varphi \right\rangle_\Gamma$$

Preuve : Il suffit d'appliquer le Théorème 15 en posant

$$\vec{v} = \nabla u$$

Conséquence :

Grâce à ce corollaire, on montre que les problèmes: pour $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$

$$(P_N) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

et

$$(Q_N)\begin{cases}\text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi + \langle g, \varphi \rangle_\Gamma\end{cases}$$

sont équivalents, de sorte que toute solution de l'un est solution de l'autre.

Remarque.

i) L'ouvert Ω étant borné, les fonctions constantes appartiennent à $H^1(\Omega)$. De sorte que si u est solution de (Q_N), prenant $\varphi = 1$, les données f et g doivent satisfaire la condition (nécessaire) de compatibilité

$$\int_\Omega f + \langle g, 1 \rangle_\Gamma = 0$$

ii) L'implicate $(P_N) \Rightarrow (Q_N)$ résulte du Corol 16. L'implication réciproque utilise également la formule de Green ainsi la surjectivité de l'opérateur de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$. ▨

Théorème 17

Soit Ω un ouvert borné, convexe et lipschitzien de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Soient

$$f \in L^2(\Omega), \quad g \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

vérifiant la condition de compatibilité

$$\int_\Omega f + \langle g, 1 \rangle_\Gamma = 0$$

Alors le problème (P_N) possède une solution $H^1(\Omega)$, unique à une constante additive près, vérifiant l'estimation :

$$\|Du\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \right)$$

Preuve :

D'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, on a

$$\inf_{K \in \mathbb{R}} \|u + K\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\Omega) \, \|Du\|_{L^2(\Omega)}$$

De sorte que la forme bilinéaire

$$a(u, \varphi) = \int_\Omega Du \cdot D\varphi$$

est coercive sur l'espace quotient :

$$V = H^1(\Omega)\big|_{\mathbb{R}}$$

Il suffit ensuite d'appliquer Lax-Milgram sur l'espace de Hilbert V.

Remarque

i) On aurait pu choisir comme espace V l'espace

$$H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega),$$

où

$$L^2_0(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \,;\, \int_\Omega v = 0 \right\},$$

lequel est un Hilbert et utiliser ensuite l'inégalité :

$$\forall\, v \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega) \,,\quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \le C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

ii) On aurait pu prendre f dans un espace plus gros que $L^2(\Omega)$. Plus précisément si $f \in L^{(2^*)'}(\Omega)$, où $(2^*)'$ est le conjugué de 2^* défini par

$$\frac{1}{2^*} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{N} & \text{si } N \geq 3 \\ \varepsilon > 0 & \text{arbitraire si } N = 2 \end{cases}$$

i.e $(2^*)' = 2N/(N+2)$ si $N \geq 3$ et $(2^*)' > 1$ si $N = 2$

iii) En théorie L^p, on a des résultats d'existence dans $W^{1,p}(\Omega)$ lorsque Ω est $C^{1,1}$ et $1 < p < \infty$ ou lorsque Ω est $C^{0,1}$ et $2-\varepsilon' < p < 2+\varepsilon$. ▨

La condition de Fourier-Robin

Il s'agit d'étudier le problème

$$(P_{FR}) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \\ -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \alpha u = g \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

où α est une fonction ≥ 0 définie sur Γ, que l'on peut formuler de manière équivalente par :

$$(Q_{FR}) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall \varphi \in H^1(\Omega), \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Gamma \alpha u v \, d\sigma = \int_\Omega f v + \langle g, v \rangle_\Gamma \end{cases}$$

7. Solutions fortes

Théorème 18

Soit Ω un ouvert borné de classe $C^{1,1}$ de $\mathbb{R}^N$. Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{3/2}(\Gamma)$. Alors la solution u donnée par le Théorème 14 appartient à $H^2(\Omega)$ et vérifie l'estimation :

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{3/2}(\Gamma)}\right)$$

Preuve

On note tout d'abord que

$$L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Gamma) \quad \text{et} \quad H^{3/2}(\Gamma) \hookrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

de sorte que le problème (P_D) a bien une solution unique $u \in H^1(\Omega)$.

On relève ensuite la donnée $g \in H^{3/2}(\Gamma)$ par $u_g \in H^2(\Omega)$ et on pose à nouveau $u = v + u_g$, de sorte que $v \in H^1(\Omega)$ vérifie :

$$\begin{cases} -\Delta v = f + \Delta u_g \in L^2(\Omega) \\ \quad v = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

et l'on se ramène ainsi à montrer que $v \in H^2(\Omega)$. Une des méthodes pour établir cette régularité consiste à utiliser la technique des quotients différentiels qui permet de montrer la régularité locale de v, i.e $v \in H^2_{loc}(\Omega)$, puis la régularité près du bord au moyen de cartes locales qui permettent de se ramener au demi-espace.

La démonstration complète étant longue et fastidieuse, nous allons l'admettre. ▨

<u>Remarque</u>:

On peut établir également l'existence de solutions dans $W^{2,p}(\Omega)$ lorsque les données f et g vérifient :

$$f \in L^p(\Omega)\,, \quad g \in W^{2-1/p,\,p}(\Gamma)$$

et que Ω est de classe $C^{1,1}$. ▨

8. Solutions très faibles

On suppose ici que Ω est un ouvert borné de classe $C^{1,1}$ et on s'intéresse au problème homogène

$$(P_D^H) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in L^2(\Omega) \\ \Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \quad u = g \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Remarque.

La fonction u appartenant "seulement" à $L^2(\Omega)$, la condition aux limites $u = g$ sur Γ n'a à priori pas de sens.

Mais nous verrons qu'en fait, on peut donner un sens à la trace d'une fonction $L^2(\Omega)$ et harmonique (on peut en fait affaiblir cette dernière hypothèse) ∎

Lemme 19

i) L'espace $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans l'espace

$$E(\Omega;\Delta) = \{ v \in L^2(\Omega) \, ; \, \Delta v \in L^2(\Omega) \}$$

ii) L'application qui à $v \longmapsto v|_\Gamma$ définie sur $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ peut se prolonger de manière unique en une application linéaire continue de

$$E(\Omega;\Delta) \text{ dans } H^{-1/2}(\Gamma)$$

iii) De plus, on a la formule de Green :

$$\begin{cases} \forall v \in E(\Omega;\Delta) \,, \quad \forall \varphi \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega v \, \Delta\varphi - \int_\Omega \varphi \, \Delta v = \left\langle v, \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} \end{cases}$$

Preuve :

i) L'idée consiste à utiliser le théorème de Hahn-Banach. Soit donc $l \in [E(\Omega;\Delta)]'$ qui s'annule sur $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ et montrons qu'elle s'annule sur $E(\Omega;\Delta)$.

On sait qu'il existe $(f, g) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in E(\Omega; \Delta) \ , \ \langle \ell, v \rangle = \int_\Omega f v + \int_\Omega g \Delta v .$$

Soient $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ les prolongements par 0, en dehors de Ω, de f et g respectivement. Alors,

$$\langle \ell, v \rangle = \int_\Omega f v + \int_\Omega g \Delta v , \qquad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f} v + \int_\Omega \tilde{g} \Delta v$$

i.e

$$\Delta \tilde{g} = - \tilde{f} \quad \text{dans } \mathbb{R}^N .$$

Comme $\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $\Delta \tilde{g} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\tilde{g} \in H^2(\mathbb{R}^N)$$

Par conséquent $g \in H^2(\Omega)$. Le prolongement, $\tilde{g}$, par 0 de g, en dehors de Ω, appartenant à $H^2(\mathbb{R}^N)$, on sait alors que

$$g \in H^2_0(\Omega)$$

Par définition, il existe une suite $(g_k)_k$ de fonct. de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$g_k \longrightarrow g \quad \text{dans } H^2(\Omega)$$

Finalement, soit $v \in E(\Omega;\Delta)$. Alors

$$\langle l, v\rangle = \lim_{k\to\infty}\left[\int_\Omega -v\,\Delta g_k + \int_\Omega g_k\,\Delta v\right]$$

$$= \lim_{k\to\infty} 0$$

$$= 0$$

ii) Soit $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ fixé et $\varphi \in H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$.

Alors

$$\int_\Omega v\,\Delta\varphi - \int_\Omega \varphi\,\Delta v = \int_\Gamma v\,\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}.$$

Soit maintenant $f \in H^{1/2}(\Gamma)$. D'après le théorème de traces, il existe $\varphi \in H^2(\Omega)$ vérifiant

$$\begin{cases} \varphi = 0 \text{ et } \dfrac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}} = f \quad \text{sur } \Gamma \\ \|\varphi\|_{H^2(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \end{cases}$$

car Ω est $C^{1,1}$.

D'où en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|\langle v, \varphi\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)}| = \left|\int_\Gamma v\,\varphi\right|$$

$$= \left|\int_\Gamma v\,\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\right|$$

$$\leq C(\Omega)\left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta v\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}\|\psi\|_{H^2(\Omega)}$$

$$\leq C(\Omega)\,\|v\|_{E(\Omega;\Delta)}\,\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

Ce qui montre que l'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} v & \longmapsto & v|_\Gamma \\ \mathcal{D}(\bar{\Omega}) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\Gamma) \end{array}$$

est continue lorsque $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est muni de la norme de $E(\Omega;\Delta)$.

On termine la démonstration en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ dans $E(\Omega;\Delta)$.

$\boxtimes$

iii) Immédiat.

Théorème 20

Soit Ω un ouvert borné de classe $C^{1,1}$ de $\mathbb{R}^n$ et soit $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Alors, le problème (P_D^0) possède une solution unique $u \in L^2(\Omega)$ vérifiant l'estimation

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \, \|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$$

Preuve

Grâce à la formule de Green ci-dessus, il est facile de voir que $u \in L^2(\Omega)$ est une solution du problème (P_D^0) si et seulement si

$$(*) \begin{cases} \forall \varphi \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega u \, \Delta\varphi = \langle g, \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \rangle_\Gamma \end{cases}$$

En effet, soit $u \in L^2(\Omega)$ solution de (P_D^0).

La formule de Green $\Longrightarrow$ $(*)$ a lieu.

Réciproquement, soit $u \in L^2(\Omega)$ solution de (*).

Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$0 = \int_\Omega u \Delta \varphi = \langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}$$

i.e

(* *) $$\Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

Soit maintenant $\varphi \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$. De (* *) et de la formule de Green ci-dessus, on déduit successivement que :

$$0 = \int_\Omega \varphi \Delta u = \int_\Omega u \Delta \varphi - \langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \rangle_\Gamma$$

puis

$$\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \rangle_\Gamma = \langle g, \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \rangle_\Gamma .$$

Le théorème de relèvement de traces montre alors que

$$\forall \mu \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \langle u, \mu \rangle_\Gamma = \langle g, \mu \rangle_\Gamma$$

i.e

$$u = g \quad \text{au sens } H^{-1/2}(\Gamma).$$

Remarque.

On peut établir un résultat similaire pour le problème de Neumann (P_N^0) avec une donnée au bord

$$h \in H^{-3/2}(\Gamma) \quad , \quad \langle h, 1 \rangle_\Gamma = 0 \quad \boxtimes$$

9. Solutions dans $H^s(\Omega)$, $0 < s < 2$

Nous avons établi dans les précédents paragraphes l'existence de solutions dans $H^1(\Omega)$, $H^2(\Omega)$ puis $L^2(\Omega)$ sous des hypothèses en général optimales (sauf pour le problème de Neumann).

Nous allons maintenant examiner le cas des solutions dans $H^s(\Omega)$ avec $0 < s < 2$ et $s \neq 1$. L'ingrédient principal consiste à utiliser l'interpolation (complexe ici).

Théorème 21

Soit Ω un ouvert borné de classe $C^{1,1}$.

1) Supposons

$$\frac{1}{2} < s < 2$$

Alors les opérateurs

i) $$\Delta : H^s(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \longrightarrow H^{s-2}(\Omega) = \left[H_0^{2-s}(\Omega)\right]'$$

si $1 < s < 2$ et $s \neq \frac{3}{2}$

ii) $$\Delta : H_0^{3/2}(\Omega) \longrightarrow \left[H_{00}^{1/2}(\Omega)\right]'$$

iii) Par dualité de i)

$$\Delta : H_0^{2-s}(\Omega) \longrightarrow H^{-s}(\Omega) = \left[H_0^s(\Omega)\right]'$$

si $1 < s < \frac{3}{2}$,

sont des isomorphismes

2) Pour tout $g \in H^s(\Gamma)$ avec $-\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$, le problème (P_D^H) possède une solution unique $u \in H^{s+\frac{1}{2}}(\Omega)$

Remarque

Que se passe-t-il si Ω est seulement lipschitzien ? Pour quelles valeurs de s peut-on avoir $u \in H^s(\Omega)$?