Le problème de Stokes

Position du problème :

Pour f fct. ou distribution donnée, on cherche un couple (u, p) solution de :

$$(S) \begin{cases} -\nu \Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où $u = (u_1, \dots, u_N)$, $f = (f_1, \dots, f_N)$, p fct scalaire et $\nu > 0$ désigne la viscosité cinématique.

Théorème 2.1 : Pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)^N$, il existe un unique $u \in H^1_0(\Omega)^N$ et $p \in L^2(\Omega)$ tq (u, p) est solution du problème (S). De plus, il existe une cste $c > 0$ ne dépendant que de Ω tq :

$$\nu \|u\|_{H^1(\Omega)} + \inf_{K \in \mathbb{R}} \|p + K\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

Dém. Notons tout d'abord que si $(u, p) \in H^1_0(\Omega)^N \times L^2(\Omega)$ est une solution de (S), alors

$$(P) \begin{cases} u \in V \text{ et} \\ \forall v \in V, \quad \nu \int_\Omega Du . Dv \, dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1} \times H^1_0} \end{cases}$$

Récipt si $u \in V$ est solution de (P), alors

$$\forall v \in V, \langle -\nu \Delta u - f, v \rangle_{H^{-1}_0 \times H^1_0} = 0$$

de sorte que grâce à De Rham, il existe $p \in L^2(\Omega)$ (unique à une cste additive près si Ω connexe) tq $\quad -\nu\Delta u + \nabla p = f$ ds Ω

Comme $u \in V$, on a donc $\operatorname{div} u = 0$ ds Ω et $u_{|\Gamma} = 0$

Ainsi les pbms (S) et (P) sont équivalents.

<u>Existence d'une sol. du pb (P)</u> :

Posons

$$a(u,v) = \nu \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx$$

$$l(v) = \langle f, v \rangle_{H^{-1} \times H^1_0}$$

Il est clair que a est bilin. cont. sur $V \times V$ et est elliptique. De m̂, l est lin. cont sur V. D'après le th. de L-M, il existe une sol. unique $u \in V$ du pb (P) et par De Rham on récupère la pression p.

L'unicité de u résulte de l'équivalence de (S) et (P) et l'unicité dans (P).

<u>Estimations</u> : En prenant $v = u$ dans (P) on a :

$$\nu \|u\|_V^2 = \langle f, u \rangle \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u\|_V$$

$$\Rightarrow \quad \nu \|u\|_V \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

Par ailleurs,

$$\|u\|_{H^1}^2 = \int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2$$

$$\leq [1 + C(\Omega)^2] \int_\Omega |\nabla u|^2$$

où $C(\Omega)$ cste de Poincaré. Donc

$$\nu \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq (1 + C(\Omega)^2)^{1/2} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

Maint^t, comme

$$\nabla p = f + \nu \Delta u \,,$$

on déduit du corollaire 1.7 point ii) que :

$$\inf_{K \in \mathbb{R}} \|p + K\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1(\Omega) \|\nabla p\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

$$\leq C_1(\Omega) \left[\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \nu \|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} \right]$$

Notons que

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|v\|_{H^1_0} \leq 1} |\langle \Delta u, v \rangle| = \sup_{\|v\|_{H^1_0} \leq 1} (\nabla u, \nabla v)$$

$$\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{H^1_0}$$

D'où

$$\inf_{K \in \mathbb{R}} \|p + K\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1(\Omega) \left[\|f\|_{H^{-1}} + \|f\|_{H^{-1}} \right].$$

Rques : i) On remarque que si Ω connexe, alors p unique à une cste additive près.

ii) Si Ω borné, non lipsch., le thm a lieu avec

$$p \in L^2_{loc}(\Omega)$$

iii) Comme la forme a est symétrique, l'unique sol. u de (P) est caractérisée par : c'est l'unique sol. du pb. de minimisation :

$$E(u) = \min_{v \in V} E(v)$$

où $E(v) = \frac{\nu}{2} \|v\|^2_V - \langle f, v \rangle_{H^{-1} \times H^1_0}$

Corollaire 2.2. Pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)^N$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)^N$ tq $\int_\Gamma g.n \, d\sigma = 0$, il existe une sol. unique $u \in H^1(\Omega)^N$ et $p \in L^2(\Omega)$ tq

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \nabla p = f & \text{ds } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{ds } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

avec l'estimation :

$$\nu \|u\|_{H^1(\Omega)} + \operatorname*{Inf}_{K \in \mathbb{R}} \|p + K\|_{L^2} \leq C(\Omega)\left(\|f\|_{H^{-1}} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\right)$$

Dém : utiliser le lemme de relèv^t 1.13

Remarque : On peut traiter également le cas compressible :

$$\operatorname{div} u = h \quad \text{dans } \Omega$$

grâce à un relèv^t adéquat !

Théorème 2.3. (Régularité). Soit Ω un ouv^t borné connexe de classe $C^{1,1}$. Pour tout $f \in L^2(\Omega)^N$, $h \in H^1(\Omega)$ et $g \in H^{3/2}(\Gamma)^N$ tq

$$\int_\Gamma g.n \, d\sigma = \int_\Omega h \, dx,$$

le pb non hom. de Stokes possède une sol. unique $(u,p) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ avec estimation corresp^t.

Dém : difficile $\Rightarrow$ on l'admet !

cf Brézis pour le pb. analogue pour Dirichlet.

Remarque : Si f, g, h sont + réguliers, on peut montrer qu'il en est de même pour u et p si Ω régulier

En particulier si $\underline{\forall m \in \mathbb{N}}$

$$f \in H^m(\Omega)^N, \quad h \in H^{m+1}(\Omega)', \quad g \in H^{m+1/2}(\Gamma)^N$$

avec c.c., alors

$$u \in H^{m+2}(\Omega)^N, \quad p \in H^{m+1}(\Omega)$$

et grâce à l'injection

$$H^m(\Omega) \subset C^k(\bar{\Omega}) \quad \text{si } m > \frac{n}{2} + k$$

On en déduit que

$$u \text{ et } p \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

Equations stationnaires de Navier-Stokes

On supposera dans tout ce chapitre que Ω est un borné, de frontière au moins lipschitzienne, dans $\mathbb{R}^N$ avec $N \leq 4$.

Position du problème :

Pour $f \in H^{-1}(\Omega)^N$, on cherche (u, p) solution de

$$
(NS) \quad \begin{cases} -\nu \Delta u + (u.\nabla)u + \nabla p = f & \text{ds } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{ds } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}
$$

Nous verrons plus loin la raison de la restriction « $N \leq 4$ ».

Formulation du problème :

$$
(P) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tq} \\ \forall v \in V, \quad \nu((u,v)) + b(u,u,v) = \langle f, v \rangle_{H^{-1} \times H^1_0} \end{cases}
$$

où $b(u, v, w) = \displaystyle\int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i \, dx$ (sommation implicite sur les indices répétés)

1. Existence.

Nous aurons besoin du théorème de point fixe de Brouwer.

Théorème 1.1 Soit K un ens. compact, convexe non vide d'un e.v. de dimension finie et S une appl. cont. de K dans K. Alors S possède au moins un point fixe.

Corollaire 1.2 Soit X un espace de Hilbert de dimension finie, de produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ et de norme $|\cdot|$. Soit P une applic. continue de X dans X vérifiant la propriété :

« il existe $r > 0$ tq pour $|\xi| = r$, $(P\xi, \xi) > 0$ ».

Alors, il existe $\xi \in X$ tq :

$$|\xi| \leq r, \quad P\xi = 0$$

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Si

$$P\xi \neq 0 \quad \text{dans } B = \{\xi, |\xi| \leq r\},$$

alors l'appl.

$$\xi \longmapsto -r \frac{P\xi}{|P\xi|}$$

$$B \longrightarrow B$$

est continue. Le théor. du pt fixe de Brouwer donne alors l'existence d'un ξ_0 tq

$$\xi_0 = -r \frac{P\xi_0}{|P\xi_0|}.$$

D'où $|\xi_0| = r$, et si on prend le produit scalaire des deux membres de la relation précédente avec ξ_0, on a :

$$|\xi_0|^2 = r^2 = -r \frac{(P\xi_0, \xi_0)}{|P\xi_0|} > 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

<u>Théorème 1.3</u> Pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)^N$, le problème (P) possède au moins une solution u vérifiant :

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\nu} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

<u>Démonstration</u>. L'idée consiste à construire par la méthode de Galerkin des solutions approchées du pb (P) et à passer ensuite à la limite.

i) Pour chaque entier $m \geq 1$, on définit une solution approchée u_m de (P) par :

$$(P_m) \begin{cases} u_m = \sum_{j=1}^{m} g_{jm} w_j , & g_{jm} \in \mathbb{R} \\ \nu((u_m, w_i)) + b(u_m, u_m, w_i) = \langle f, w_i \rangle & \forall\, 1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

Il s'agit là d'un système non linéaire de m équations à m inconnues $(g_{jm})_{j=1,\dots,m}$. Pour le résoudre, nous utiliserons le corollaire 1.2. On considère donc l'opérateur

$$\Phi_m : V_m \longrightarrow V_m$$
$$u \longmapsto \Phi_m(u)$$

où $((\Phi_m(u), v)) = \nu((u, v)) + b(u, u, v) - \langle f, v \rangle$

$$v \in V_m$$

et $V_m = \langle w_1, \dots, w_m \rangle$, espace muni du produit scalaire induit par celui de V.

Notons que pour u donné dans V_m, la relation précédente définit un élt unique $\Phi_m(u) \in V_m$, car c'est un système linéaire de m équations à m inconnues dont la matrice

$$\big(((w_i, w_j))\big)_{1 \le i, j \le m}$$

est symétrique définie positive (ou bien utiliser Lax-Milgram).
Vérifions maintenant que les hypothèses du corollaire 1 2 sont bien satisfaites. Pour la continuité de Φ_m, on note d'abord que pour tout $u, v, w \in V_m$,

$$|((\Phi_m(u) - \Phi_m(v), w))| = |\nu((u-v, w)) + b(u,u,w) - b(v,v,w)|$$
$$\le \nu \|u-v\| \|w\| + |b(u,u,w) - b(v,v,w)|$$

Mais, grâce à l'inégalité de Hölder :

$$|b(u,u,w) - b(v,v,w)| = |b(u-v, u, w) + b(v, u-v, w)|$$
$$\le C_1 \big[\|u-v\|_{L^4} \|u\| \|w\|_{L^4} + \|v\|_{L^4} \|u-v\| \|w\|_{L^4}\big]$$
$$\le C_2 \|u-v\| \big(\|u\|\|w\| + \|v\|\|w\|\big)$$

(où l'on a utilisé l'inj. de Sobolev $H^1_0(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ si $N \le 4$)

$$\Rightarrow \|\Phi_m(u) - \Phi_m(v)\| \le \nu \|u-v\| + C_2 (\|u\| + \|v\|) \|u-v\|,$$

ce qui montre la continuité de Φ_m. D'autre part, notons que

$$\forall u \in V, \; v \in H^1_0(\Omega)^N, \quad b(u,v,v) = 0$$

car $$\int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_i \, dx = \frac{1}{2} \int_\Omega u_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i^2 \, dx = -\frac{1}{2} \int_\Omega v_i^2 \operatorname{div} u$$
$$= 0$$

De sorte que pour tout $v \in V_m$,

$$
\begin{aligned}
((\Phi_m(v), v)) &= \nu \|v\|^2 - \langle f, v\rangle \\
&\geq \nu \|v\|^2 - \|f\|_{H^{-1}} \|v\| \\
&= (\nu \|v\| - \|f\|_{H^{-1}}) \|v\| \\
&> 0
\end{aligned}
$$

si l'on choisit r tq $r > \frac{1}{\nu} \|f\|_{H^{-1}}$ et $\|v\| = r$.

Ainsi,

$$\exists ! \ u_m \in V_m \ \text{tq} \ \Phi_m(u_m) = 0 ,$$

i.e.

$$\forall v \in V_m , \quad \nu ((u_m, v)) + b(u_m, u_m, v) = \langle f, v\rangle$$

ii) <u>Passage à la limite</u>

- Choisissons $v = u_m$:

$$\nu \| u_m \|^2 = \langle f, u_m \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \| u_m \| \leq \frac{1}{\nu} \| f \|_{H^{-1}}$$

i.e. (u_m) bornée ds V et l'on peut donc extraire une sous-suite (u_k) tq

$$u_k \longrightarrow u \quad \text{dans } V \text{ faible} .$$

L'injection de V dans $L^2(\Omega)^N$ étant compacte, alors

$$u_k \longrightarrow u \quad \text{dans } L^2(\Omega)^N \text{ fort}$$

Par ailleurs, puisque $N \leq 4$, (u_m) est aussi bornée dans $L^4(\Omega)^N$ et donc

$$u_{m_i} u_{m_j} \longrightarrow \chi_{ij} \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

et d'après (*), on a donc

$u_{m_i} u_{m_j} \to u_i u_j$ dans $L^1(\Omega)$ fort et $\chi_{ij} = u_i u_j$.

Ceci montre que

$$u_{m_i} u_{m_j} \rightharpoonup u_i u_j \text{ ds } L^2(\Omega) \text{ faible !}$$

Retour au problème approché :

$$\nu((u_m, v)) + b(u_m, u_m, v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in V_m$$

On fait tendre $m \to +\infty$. La relation ci-dessus est vraie pour tout $v \in V_{m_0}$ avec m_0 fixé :

$$\nu((u, v)) + b(u, u, v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in V_{m_0}$$

Mais m_0 qcq, donc

$$\nu((u, v)) + b(u, u, v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in V_m, \forall m$$

Mais pour tout $v \in V$, $\exists v_m \in V_m$ tq

$$v_m \to v \text{ dans } V$$

d'où

$$\nu((u, v_m)) + b(u, u, v_m) = \langle f, v_m\rangle$$

et à la lim

$$\nu((u, v)) + b(u, u, v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in$$

iii) <u>Unicité de u</u> : soient u et u^* 2 sol et $w = u - u^*$. Alors

$$\nu\|w\|^2 = -b(w, u, w) \le C_1 \|w\|^2 \|u\| \quad (H^1 \subset L^4)$$

$$\le C_1 \|w\|^2 \frac{1}{\nu} \|f\|_{H^{-1}}$$

où C_1 est une constante ne dépendant que de Ω . De (7.8) il vient alors

$$\nu ||w||^2 \leq \frac{C_2}{\nu} ||f||_{H^{-1}(\Omega)} ||w||^2,$$

i.e.

$$(\nu - \frac{C_2}{\nu} ||f||_{H^{-1}(\Omega)}) ||w||^2 \leq 0.$$

De l'hypothèse (7.16), le résulat suit immédiatement. ■

Remarque 7.1. L'inégalité (7.16) peut s'interpréter en disant que $||f||_{H^{-1}(\Omega)}$ est assez petit ou bien la viscosité ν est assez grande. ■

7.5. Un théorème de régularité

Comme pour le problème de Stokes on peut démontrer le

Théorème 7.6. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3, de classe C^r où $r = max(m + 2, 2), m$ entier ≥ -1. Si f satisfait à*

$$f \in [H^m(\Omega)]^n, \tag{7.17}$$

alors toute solution (u, p) du problème (6.1)-(6.3) vérifie

$$u \in [H^{m+2}(\Omega)]^n, \ p \in H^{m+1}(\Omega), \tag{7.18}$$

où p est unique à une constante additive près.

Démonstration. Pour $m = -1$, le résultat est donné par les théorèmes 7.4 et 7.3.

i) Cas de la dimension 2.

• Si $m = 0$.

Comme on l'a déjà fait remarquer (voir la démonstration du théorème 7.4), le terme non linéaire peut s'écrire $u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j u_i)$. Puisque $u \in [H_0^1(\Omega)]^2$, quelque soit $1 \leq q, \ r < +\infty$, on a donc $u \in [L^q(\Omega)]^2$ et $u_j u_i \in L^r(\Omega)$. Comme pour de tels $r, L^2(\Omega) \subset W^{-1,r}(\Omega)$ la proposition 5.3 montre que $u \in [W^{1,r}(\Omega)]^2$, $\forall \ 1 \leq r < +\infty$. Maintenant puisque $W^{1,r}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, il s'ensuit que $u_j D_j u_i \in L^r(\Omega)$ pour tout $2 < r < +\infty$ (et pour $r = 2$ aussi puisque Ω est borné). On applique à nouveau la proposition 5.3 ; on a

$$u \in [H^2(\Omega)]^2, \ p \in H^1(\Omega).$$

• Si $m = 1$.

L'appartenance de u à $[H^2(\Omega)]^2$ entraîne que $(u \cdot \nabla)u \in [H^1(\Omega)]^2$ et de la proposition 5.3 il vient que

$$u \in [H^3(\Omega)]^2, \ p \in H^2(\Omega).$$

• Si $m \geq 2$.

L'appartenance de u à $[H^{m+1}(\Omega)]^2$ implique que $(u \cdot \nabla)u \in [H^m(\Omega)]^2$ et ensuite par la proposition 5.3 on obtient le résultat annoncé.

ii) Cas de la dimension 3.

• Si $m = 0$.

Comme $u \in [L^6(\Omega)]^3$, alors $(u \cdot \nabla)u \in [L^{3/2}(\Omega)]^3$ (utiliser l'inégalité de Hölder). La proposition 5.3 implique alors que $u \in [W^{2,3/2}(\Omega)]^3$; par conséquent $u \in [L^r(\Omega)]^3$, pour tout $1 \leq r < +\infty$. Donc $D_j(u_j u_i) \in [W^{-1,r}(\Omega)]^3$, pout tout $1 \leq r < +\infty$. Le reste de la démonstration est identique à celle de la dimension 2. ∎

Corollaire 7.7. *Si* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n, n = 2$ *ou* 3 *et si* $f \in [C^\infty(\overline{\Omega})]^n$ *alors toute solution* (u,p) *du problème (7.1)-(7.3) est dans* $[C^\infty(\overline{\Omega})]^{n+1}$.

Démonstration. Elle est évidente à partir du théorème précédent. ∎

Remarque 7.2. Les techniques utilisées dans la preuve du théorème 7.6 ne peuvent s'appliquer au cas $n = 4$. En effet, si on écrit le terme non linéaire sous la forme $D_j(u_j u_i)$, on sait seulement que $u_j u_i \in L^2(\Omega)$ et $D_j(u_j u_i) \in H^{-1}(\Omega)$, i.e. la proposition 5.3 ne donne pas d'autre information sur la régularité de u ($u \in [H^1(\Omega)]^4$). Si on écrit le terme non linéaire sous la forme $(u \cdot \nabla)u$ alors, par l'inégalité de Hölder, $(u \cdot \nabla)u \in [L^{4/3}(\Omega)]^4$ et la proposition 5.3 entraîne alors que $u \in [W^{2,4/3}(\Omega)]^4$; mais dans ce cas on n'a pas de renseignements autres que $u \in [L^4(\Omega)]^4$ et $\nabla u \in [L^2(\Omega)]^{16}$. ∎

7.6. Le cas non homogène

Nous considérons dans ce paragraphe le problème stationnaire non homogène des équations de Navier-Stokes :

$$-\nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f \quad \text{dans } \Omega, \tag{7.19}$$

$$div\ u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{7.20}$$

$$u_{|\Gamma} = g. \tag{7.21}$$

On suppose ici que l'ouvert Ω est de plus connexe. On note Γ_i, $i = 0, \ldots, p$ les composantes connexes de la frontière Γ de Ω (voir figure ci-contre).