Université de Monastir
Faculté des Sciences de Monastir
Département de Mathématiques

Commission de Master de Recherche en Mathématiques

(P1)

PROPOSITION DE SUJET DE MEMOIRE DE MASTER

Année Universitaire 2023-2024

- **Encadrant** : Prof. Maatoug Hassine
- **Titre du sujet :** Analyse de sensibilité topologique pour un système thermoélastique.

Description du sujet : L'objectif de ce sujet de mastère est le développement d'une méthode de sensibilité topologique pour le problème thermoélastique permettant d'évaluer le comportement asymptotique de la solution par rapport à des petites perturbations géométriques.

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ et $\omega_{z,\rho}$ une petite perturbation géométrique de taille $0 < \rho << 1$ localisée autour d'un point arbitraire $z \in \Omega$. La solution perturbée (u_ρ, θ_ρ) du problème thermoélastique satisfait le système couplé suivant

$$\left\{\begin{array}{rlll} \mathrm{div}\sigma(u_\rho) - \gamma\nabla\theta_\rho & = 0 & \text{dans} & \Omega\backslash\overline{\omega_{z,\rho}}, \\ \Delta\theta_\rho & = 0 & \text{dans} & \Omega\backslash\overline{\omega_{z,\rho}}, \\ \sigma(u_\rho)n = F,\ \gamma\nabla\theta_\rho\cdot n & = \Phi & \text{sur} & \partial\Sigma_n, \\ u_\rho = 0,\ \theta_\rho & = 0 & \text{sur} & \partial\Sigma_d, \\ \sigma(u_\rho)n - \gamma\theta_\rho = 0,\ \nabla\theta_\rho\cdot n & = 0 & \text{sur} & \partial\omega_{z,\rho}, \end{array}\right. \tag{1}$$

avec Σ_n et Σ_d sont deux parties disjointes de la frontière vérifiant $\Sigma_n \cap \Sigma_d = \emptyset$ et $\overline{\partial\Omega} = \overline{\Sigma_n} \cup \overline{\Sigma_d}$. Soit j une fonction de forme, définie par

$$j(\Omega\backslash\overline{\omega_{z,\rho}}) = J(u_\rho, \theta_\rho).$$

La méthode de sensibilité topologique consiste à étudier la variation de la fonction j par rapport à la création d'une petite perturbation géométrique. Il s'agit de développer une formule asymptotique de la forme

$$j(\Omega\backslash\overline{\omega_{z,\rho}}) = j(\Omega) + \psi(\rho)\delta j(z) + o\big(\psi(\rho)\big),$$

avec

- $\rho \mapsto \rho(\rho)$ est une fonction scalaire positive, représente le comportement de j par rapport à la taille de la perturbation.
- $z \mapsto \delta j(z)$ représente le terme principale de la variation $j(\Omega\backslash\overline{\omega_{z,\rho}}) - j(\Omega)$. dite le gradient topologique. Il joue le rôle d'une direction de descente dans les algorithmes d'optimisation topologique.

Bibliographie :

[1] S. Garreau, Ph. Guillaume, M. Masmoudi. *The topological asymptotic for PDE systems : the elasticity case.* SIAM J. Vol. 39(6), 1756-1778, 2001.

[2] Emna Ghezaiel, Maatoug Hassine, *Topological Asymptotic Expansion for a Thermal Problem.* J. Applied Mathematics & Optimization. vol 84, 955-965, 2021.

[3] E. Maayoufi. *Quelques problèmes inverses d'identification de défauts en milieux thermoélastiques.* Thèse, Tunis-ElManar University, 2024.

P2

UNIVERSITÉ DE MONASTIR
FACULTÉ DES SCIENCES DE MONASTIR
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Commission de Master de Recherche en Mathématiques

PROPOSITION DE SUJET DE MEMOIRE DE MASTER

Année Universitaire 2023-2024

- **Encadrant** : Prof. Maatoug Hassine
- **Titre du sujet** : Analyse de sensibilité par rapport à des petites perturbations singulières de la frontière.

Description du sujet : L'objectif de ce sujet de mastère est le développement d'un cadre mathématique permettant d'analyser le comportement asymptotique de la solution d'une équation aux dérivées partielles par rapport à la création d'une perturbation de la condition aux limites sur une petite partie de la frontière.

D'une manière plus précise, soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ un domaine borné dont la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ est suffisamment rgulière. On suppose que la frontière Γ est décomposée en deux parties disjointes non vides Γ_d et Γ_n. Comme exemple de modèle, on considère le problème de Stokes qui consiste à trouver les champs de vitesse et de pression $(u_0, p_0) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ solution de

$$\left\{\begin{array}{rlll} -\nu\Delta u_0 + \nabla p_0 & = F & \text{dans} & \Omega, \\ \text{div}\, u_0 & = 0 & \text{dans} & \Omega, \\ u_0 & = 0 & \text{sur} & \Gamma_d, \\ \sigma(u_0, p_0)n & = 0 & \text{sur} & \Gamma_n, \end{array}\right. \tag{1}$$

avec ν est la viscosité du fluide, $F \in L^2(\Omega)$ et $\sigma(u_0, p_0)$ est le tenseur des contraintes.
Soit $\gamma_\varepsilon \subset \Gamma$ une petite partie lipshitzienne de la frontière Γ tel que $|\gamma_\varepsilon| = O(\varepsilon)$, avec $0 < \varepsilon << 1$ un paramètre réel infinitésimal. On note par u_ε la solution du problème perturbé en modifiant le type de la condition aux limites sur γ_ε. Dans cette étude, on considère deux types de perturbations : une perturbation de type Dirichlet qui consiste à créer une condition de type Dirichlet dans la partie Neumann Γ_n. Dans ce cas $\gamma_\varepsilon \subset \Gamma_n$ et la solution perturbée u_ε satisfait le système

$$\left\{\begin{array}{rlll} -\nu\Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon & = F & \text{dans} & \Omega, \\ \text{div}\, u_\varepsilon & = 0 & \text{dans} & \Omega, \\ u_\varepsilon & = 0 & \text{sur} & \Gamma_d \cup \gamma_\varepsilon, \\ \sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon)n & = 0 & \text{sur} & \Gamma_n \backslash \gamma_\varepsilon, \end{array}\right. \tag{2}$$

une perturbation de type Neumann qui consiste à créer une condition de type Neumann dans la partie Dirichlet Γ_d. Dans ce cas $\gamma_\varepsilon \subset \Gamma_d$ et la solution perturbée u_ε satisfait le système

$$\left\{\begin{array}{rlll} -\nu\Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon & = F & \text{dans} & \Omega, \\ \text{div}\, u_\varepsilon & = 0 & \text{dans} & \Omega, \\ u_\varepsilon & = 0 & \text{sur} & \Gamma_d \backslash \gamma_\varepsilon, \\ \sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon)n & = 0 & \text{sur} & \Gamma_n \cup \gamma_\varepsilon, \end{array}\right. \tag{3}$$

Ce travail consiste à développer une ètude théorique et numérique pour évaluer le comportement asymptotique de la solution perturbé relativement à la taille ε de la zone de perturbation γ_ε.

Bibliographie :

[1] E Bonnetier, C Dapogny, MS Vogelius, *Small perturbations in the type of boundary conditions for an elliptic operator*. J. Math. Pures et Appliquées 167, 101-174, 2023.

[2] M. Hassine, M. Ouni, *Topological sensitivity analysis for the 3D nonlinear Navier–Stokes equations*. Asymptotic Analysis, vol. 135, no. 1-2, pp. 277-304, 2023.

[3] Emna Ghezaiel, Maatoug Hassine. *Topological sensitivity analysis based method for solving a geometry reconstruction problem*. J. Mathematics and Computers in Simulation, vol 169 , 26-50, 2020.

P3

Caractérisation des polynômes orthogonaux semi-classiques via des transformations polynomiales

On désigne par $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$ et par $\mathcal{P}'$ son duale. On note par $\langle u, p \rangle$ l'action d'une forme $u \in \mathcal{P}'$ sur un polynômes $p \in \mathcal{P}$.

Une forme $u \in \mathcal{P}'$ est dite semi-classique, si elle est régulière et s'il existe deux polynômes $\phi, \psi \in \mathcal{P}$ (ϕ normalisé et $deg(\psi) \geq 1$), tels que u soit une solution de l'équation fonctionnelle

$$(\phi u)' + \psi u = 0,$$

où

$$\langle u', p \rangle := -\langle u, p' \rangle \quad \text{et} \quad \langle qu, p \rangle := -\langle u, qp \rangle, \quad p, q \in \mathcal{P}.$$

Étant donnée deux formes linéaires régulières u et v, et soient $\{p_n\}_{n\geq 0}$ et $\{q_n\}_{n\geq 0}$ les suites correspondantes de polynômes orthogonaux normalisés. Supposons qu'il existe deux polynômes normalisés θ_m et π_k de degrés m et k (respectivement), avec $0 \leq m \leq k-1$, $k \geq 2$ et $r \in \mathbb{C}$, de telle sorte que

$$p_{nk+m}(x) = \theta_m(x) q_n(\pi_k(x)), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Il s'agit de déterminer et de caractériser une large famille de formes semi-classiques via les transformations polynomiales mentionnées ci-dessus.

Pré-requis: Intégration, Fonctions spéciales, Polynômes orthogonaux, Topologie, Équations differentielles, Fonctions hypergéométriques.
Structure de recherche: Analyse, Géométrie et Applications LR18ES16

Références:

[1] K. Castillo, M.N. de Jesus, and J. Petronilho, On semiclassical orthogonal polynomials via polynomial mappings, J. Math. Anal. Appl. 455 (2017), pp 18011821.

[2] T.S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Breach, New York, (1978).

[3] P. Maroni, Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux. Application aux polynômes orthogonaux semi-classiques (in French) [An algebraic theory of orthogonal polynomials. Applications to semi-classical orthogonal polynomials], in Orthogonal Polynomials and their Applications (Erice, 1990), IMACS Ann. Comput. Appl. Math. Vol. 9, C. Brezinski et al., eds., Baltzer, Basel, 1991, pp. 95130.

[4] G. Szegö, Orthogonal polynomials, AMS Colloq. Pub. 23, Fourth Edition, AMS Providence (1975).

Professeur Imed Ben Salha

(P4)

SUJET DE MÉMOIRE DE MASTÈRE - MRMA2

KAÏS AMMARI

Fractional Cauchy problems: stability and decay rate

Description

The solutions to fractional Cauchy problems in Banach spaces are understood through the utilization of corresponding fractional resolvent families. This dissertation project endeavors to delve into the realm of fractional Cauchy problems with the specific focus on examining their uniform stability.

References

[1] K. Ammari, F. Hassine and L. Robbiano, *Stabilization for some fractional-evolution systems*, SpringerBriefs Math. Springer, Cham, 2022.

[2] W. Arendt, C. Batty, M. Hieber and F. Neubrander, *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*, 2nd Edition, Birkhäuser, Basel, 2011.

[3] L. Gearhart, Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **236** (1978), 385–394.

[4] R. Gorenflo, A.A. Kilbas, F. Mainardi and S. Rogosin, *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*, 2nd Edition, Springer, GmbH Germany, part of Springer Nature, 2020.

LR Analyse et Contrôle des EDPs, LR 22ES03, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Monastir, Université de Monastir, 5019 Monastir, Tunisie

E-mail address: kais.ammari@fsm.rnu.tn

Faculté des Sciences de Monastir

Département de Mathématiques

Hajer Jebali

Email : hajer.jebali@fsm.rnu.tn

P5

AU : 2023/2024

Sujet de mémoire de Mastère

Proposé par : Hajer Jebali

Titre : Opérateur de Read-Bajraktarevic et fonctions fractales.

Description : Les fonctions fractales forment une classe, assez particulière, de fonctions continues qui ne sont nullement différentiables. Elles doivent leur appellation au fait que leurs graphes sont des ensembles fractals. Ces fonctions sont souvent utilisées dans l'interpolation et l'approximation de courbes ou de surfaces. L'opérateur de Read-Bajraktarevic fournit un cadre naturel pour la construction des fonctions fractales, en termes de systèmes itérés de fonctions hyperboliques. Le but de ce mémoire est de discuter l'existence de fonctions fractales, en utilisant certains résultats de la théorie de point fixe qui généralisent le théorème classique de Banach. Certaines de leurs propriétés et de leurs applications seront étudiées.

Prérequis : Théorème du point fixe, notions générales de topologie.

Références :

[1] Michael F. Barnsley, Fractals everywhere, (1988), Academic Press New York Inc.

[2] Peter R. Massopust, Fractal functions, fractal surfaces and wavelets, 2nd ed, Academic Press, San Diego, USA, (2016).

[3] Peter R. Massopust, Fractal interpolation over nonlinear partitions, Chaos, Solitons and Fractals, Vol 162, (2022).

Structure de recherche : Laboratoire d' Analyse, Probabilité et Fractales (LR18ES17).

UNIVERSITÉ DE MONASTIR
FACULTÉ DES SCIENCES DE MONASTIR
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

P6

Commission de Master de Recherche en Mathématiques

PROPOSITION DE SUJET DE MEMOIRE DE MASTER

Année Universitaire 2023-2024

- **Encadrant** : Maatoug Hassine et Mohamed BenSaleh
- **Titre du sujet** : Méthode du gradient topologique et la détection des structures fines.

Description du sujet : L'un des principaux défis en analyses d'images médicales est la détection de contours et des structures fines. Parmi les méthodes qui ont été développées ces dernières années, on cite la méthode du gradient topologique qui a été introduite pour l'optimisation de forme géométrique des objets. C'est une technique d'optimisation qui consiste à trouver la géométrie optimale d'un objet vis-à-vis certains critères. Mathématiquement, ce problème peut être modélisé de la façon suivante :

$$\min_{\Omega \in \mathcal{D}} J(u_\Omega),$$

avec $\mathcal{D}$ est un ensemble de domaines admissibles et u_Ω est la solution d'une équation aux dérivées partielles définie dans Ω.
Soit $\sigma_{z,\varepsilon} = z + \varepsilon\sigma$ une petite perturbation géométrique de taille infinitésimale (i.e. $|\sigma_{z,\varepsilon}| = O(\varepsilon)$ avec $0 < \varepsilon << 1$) modélisant une partie d'un contour ou une structure fine. La méthode du gradient topologique consiste à étudier le comportement asymptotique de la fonction J par rapport à l'emplacement et la taille de la perturbation $\sigma_{z,\varepsilon}$.

Dans le cadre de ce sujet de master, on considère des fonctions d'énergie de la forme suivante

$$J(u_\varepsilon) = \int_\Omega |u_\varepsilon - g|^2 dx + \int_\Omega \alpha_\varepsilon |\Delta u_\varepsilon|^2 dx + \int_\Omega \beta_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 dx,$$

avec g est une mesure donnée et u_ε est la solution du système Euler-Lagrange associé

$$\left\{ \begin{array}{rll} \Delta(\alpha_\varepsilon \Delta u_\varepsilon) - \operatorname{div}(\beta_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) + u_\varepsilon & = g & \text{dans} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial(\alpha_\varepsilon \Delta u_\varepsilon)}{\partial n} - \beta_\varepsilon \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} & = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \\ \Delta u_\varepsilon & = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{1}$$

avec

$$\alpha_\varepsilon = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_0 & \text{dans} \quad \Omega \backslash \overline{\sigma_{z,\varepsilon}}, \\ \alpha_1 & \text{dans} \quad \sigma_{z,\varepsilon} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \beta_\varepsilon = \left\{ \begin{array}{ll} \beta_0 & \text{dans} \quad \Omega \backslash \overline{\sigma_{z,\varepsilon}}, \\ \beta_1 & \text{dans} \quad \sigma_{z,\varepsilon} \end{array} \right. \tag{2}$$

L'objectif de ce mémoire de Mastère est le développement d'une approche numérique permettant d'identifier les contours et les structures fines dans une image.

Bibliographie :

[1] Gilles Aubert and Audric Drogoul. *Topological gradient for a fourth order operator used in image analysis.* ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, vol. 21(4), 1120-1149, 2015.

[2] Mohamed Lajili, Badreddine Rjaibi, Didier Auroux, and Maher Moakher. *Edge detection from X-ray tomographic data for geometric image registration.* Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 46(6), 6324-6358, 2022.

[3] Emna Ghezaiel, Maatoug Hassine. *Topological sensitivity analysis based method for solving a geometry reconstruction problem.* J. Mathematics and Computers in Simulation, vol 169 , 26-50, 2020.

P7

STABILITÉ UNIFORME D'UNE EQUATION DES ONDES POSÉE DANS UN MILIEU NON HOMOGÈNE SOUS L'EFFET D'UN DAMPING LOCALEMENT DISTRIBUÉ

SABEUR MANSOURI

On s'intéresse à l'équation des ondes semilinéaire posée dans un milieu non-homogène suivante:

$$
(0.1) \qquad \begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\cdot\nabla u) + f(u) + a(x)g(u_t) = 0 & \text{in} \quad \Omega\times(0,\infty), \\ u = 0 & \text{on} \quad \Gamma\times(0,\infty), \\ u(x,0) = u^0(x), \quad u_t(x,0) = u^1(x) & \text{in} \quad \Omega, \end{cases}
$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ est un domaine borné à bord Γ suffisamment régulier, $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $k_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$, $1 \leq i,j \leq d$ sont des fonctions $C^\infty(\Omega)$ telles que pour tout $x \in \Omega$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$, on a

$$
(0.2) \qquad \alpha_0 \leq \rho(x) \leq \beta_0, \quad k_{ij}(x) = k_{ji}(x), \quad \alpha|\xi|^2 \leq \xi^\top \cdot K(x)\cdot\xi \leq \beta|\xi|^2,
$$

où $\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta$ sont des constantes positives et $K(x) = (k_{ij})_{i,j}$ est une matrice symetrique définie positive. On note par ω l'intersection de Ω avec un voisinage de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^d$. De plus, $a = a(x) \in L^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\omega})$ est une fonction réelle positive vérifiant la condition suivante:

$$
(0.3) \qquad a(x) \geq a_0 > 0, \quad \forall x \in \omega.
$$

Ce travail comprend deux parties principales. La première consiste à étudier l'aspect bien posé de ce problème. Pour cela, une étude du semi-groupe nonlinéaire sera effectué. La deuxième partie consiste à étudier la stabilité uniforme du semigroupe associé pour toutes données initiales de l'espace des phases à énergie finie. Il s'agit d'obtenir une inégalité d'observabilité pour tout le système nonlinéaire avec damping.

References

[1] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, A. B. Pampu, M. Astudillo, Uniform decay rate estimates for the semilinear wave equation in inhomogeneous medium with locally distributed nonlinear damping. Nonlinearity 31 (2018), no. 9, 4031-4064.

P8

Proposition de Sujet de mémoire de Master

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2023-2024

Titre du sujet	Encadrant	Laboratoire de recherche
Solutions fortes d'équations différentielles stochastiques avec temps local et mouvement Brownien fractionnaire	Prof. Mounir Zili	LR18ES17 Analyse, probabilités et fractales

Description du sujet:

Il s'agit d'une initiation à l'étude des équations différentielles stochastiques avec drift généralisé, et ce à travers l'analyse de l'article (*) ci-dessous.

Objectifs :

1. Comprendre et Maîtriser :
   a. Les caractéristiques élémentaires des processus Gaussiens, et en particulier celles du mouvement Brownien fractionnaire.
   b. Les temps locaux des processus stochastiques et les conditions de leur existence.
   c. La notion de solutions fortes d'équations différentielles stochastiques.

2. Comprendre et analyser de l'article (*) ci-dessous.

Prérequis : Probabilités en temps continu, Analyse et intégration.

Perspectives : En prévision de faire une thèse de doctorat en cotutelle

Références :

(*) D.Baños, S. Ortiz-Latorre, A. Pilipenko, F. Proske. *Strong Solutions of Stochastic Differential Equations with Generalized Drift and Multidimensional Fractional Brownian Initial Noise* Journal of Theoretical Probability, February 2021.

PROPOSITION de sujet de mémoire de Master

de Mathématiques

PS

Année universitaire 2023-2024

Encadrant: ....SELMA NEGZAOUI ....

Titre du sujet:...... Théorèmes de Titchmarsh pour une transformée de Fourier généralisée .....

Description du sujet:

L'objectif de ce mémoire est de démontrer une généralisation des théorèmes de Titchmarsh pour la transformée de Fourier généralisée appelée transformée (k,n)-Fourier, où n est un entier positif et k est une constante provenant de la théorie de Dunkl. En tant qu'application, nous dérivons un théorème du multiplicateur (k,n)-Fourier pour les espaces Lipschitz de L^2. De plus, nous donnons des conditions nécessaires pour assurer que f appartient à l'une des classes généralisées de Lipschitz d'ordre m. Cela nous permet d'établir l'équivalent du résultat de type Boas pour $\mathbf{F}_{k,n}$.

Bibliographie

1. M. Mannai, S. Negzaoui, Titchmarsh and Boas-type theorems related to (κ,n)-Fourier transform, Analysis, 2024. https://doi.org/10.1515/anly-2023-0045
2. S. Ben Said, T. Kobayashi, and B. Orsted, Laguerre semigroup and Dunkl operators. Compos. Math. {148} (2012), no. 4, 1265–1336.